AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 5 di lunedì 28 ottobre 2024

Argomenti: limiti di funzioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+3}{x-3}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} n\log\frac{x+3}{x-3} &= \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{6}{x-3}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(6\frac{x-3}{6}\log\left(1+\frac{6}{x-3}\right)+3\log\left(1+\frac{6}{x-3}\right)\right)\\
&= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{6}{x-3}\right)}{\frac{6}{x-3}}+3\lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{6}{x-3}\right)\\
&= 6.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0}\frac{x^x-1}{(3x)^{3x}-1}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x^x-1}{(3x)^{3x}-1} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{x\log x}-1}{e^{3x\log(3x)}-1}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{x\log x}-1}{x\log x}}{\frac{e^{3x\log(3x)}-1}{3x\log(3x)}}\frac{x\log x}{(3x)\log(3x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{x\log x}{(3x)\log(3x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\log x}{3(\log 3+\log x)}\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+3)}{x+\sqrt{x+2}-1}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+3)}{x+\sqrt{x+2}-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x)+\log(1+3e^{-x})}{x+\sqrt{x+2}-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x+2}-1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{-x}+1)}{x+\sqrt{x+2}-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0^+} \left(2^{\frac{1}{x}} + (1+x)^{\frac{1}{x^2}}\right)^x.$$

Soluzione: Poiché $(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to0}{\to} e > 2$, allora $\dfrac{2}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} < 1$ per x vicino a 0, dunque

$$\lim_{x\to0^+} \left(2^{\frac{1}{x}} + (1+x)^{\frac{1}{x^2}}\right)^x = \lim_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\left(\frac{2}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\right)^{\frac{1}{x}} + 1\right)^x = e.$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to e} \frac{\log(1+x-e)}{\log(\log x)}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e} \frac{\log(1+x-e)}{\log(\log x)} &= \lim_{x\to e} \frac{(x-e)\frac{\log(1+x-e)}{x-e}}{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{x-e}{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)} \\
&= \lim_{x\to e} e\frac{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)} \frac{\frac{x-e}{e}}{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)} \\
&= e.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0} \left(2^{1+x} - 5^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \left(2^{1+x} - 5^x\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0} \left(\left(1+\left(2^{1+x}-5^x-1\right)\right)^{\frac{1}{2^{1+x}-5^x-1}}\right)^{\frac{2^{1+x}-5^x-1}{x}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\frac{2^{1+x}-5^x-1}{x}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{2\frac{2^x-1}{x}-\frac{5^x-1}{x}} \\
&= e^{2\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}} \\
&= e^{2\log 2-\log 5} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\sqrt{e^{2x}+1}-e^{2x}\right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\sqrt{e^{2x}+1}-e^{2x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^x\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}+e^x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}+1}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e}{\log x}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e}{\log x} &= \lim_{y\to0}\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}}-e}{\log(1+y)}\\
&= e\lim_{y\to0}\frac{y}{\log(1+y)}\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}-1}-1}{y}\\
&= e\lim_{y\to0}\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}-1}-1}{y}\\
&= e\lim_{y\to0}\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}-1}-1}{\sqrt[3]{1+y}-1}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}\\
&= \frac{e}{3}.
\end{aligned}$$