AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 7 di lunedì 18 novembre 2024

Argomenti: limiti con la regola di de l'Hôpital

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\log(1+x)-\log(1+2x)}{1-\cos x}.$$

Soluzione: Poiché il limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, è possibile applicare la regola di de l'Hôpital con $f(x)=2\log(1+x)-\log(1+2x), g(x)=1-\cos x$ e ottenere

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\log(1+x)-\log(1+2x)}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x}-\frac{2}{1+2x}}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+3x+2x^2)\sin x}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+3x+2x^2}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x-\cos x-e^x}{x^3}.$$

Soluzione: Applicando ripetutamente la regola di de l'Hôpital alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x-\cos x-e^x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-e^x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\cos x-e^x}{6x}\\ &= \frac{1}{6}\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x.$$

Soluzione: Scrivendo $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x = \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}{\cos x}$ è possibile applicare la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x\right)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{-\sin x} = -1.$$

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log x}\right).$$

Soluzione: Poiché $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log x} = \frac{\log x+1-x}{(1-x)\log x}$ è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ si può applicare la regola di de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log x}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{(\log x+1-x)'}{((1-x)\log x)'}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1-x}{x}-\log x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{x\log x}{x-1}}\\
&= \frac{1}{1-\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}(e^x+2x)^{\frac{1}{x}}.$$

Soluzione: Scrivendo $(e^x+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(e^x+2x)}{x}}$, è possibile applicare la regola di de l'Hôpital all'esponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x+2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+2}{e^x+2x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2}{e^x+2x} = 3,$$

dunque

$$\lim_{x\to 0}(e^x+2x)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\arcsin x}.$$

Soluzione: Poiché $(\sin x)^{\arcsin x} = e^{\log(\sin x)\arcsin x} = e^{\frac{\arcsin x}{\frac{1}{\log(\sin x)}}}$ si può applicare la regola di de l'Hôpital all'esponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\frac{1}{\log(\sin x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{\cos x}{\sin x\log^2(\sin x)}} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos x}\lim_{x\to 0}\sin x\log^2(\sin x) = 0,$$

dunque

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\arcsin x} = e^0 = 1.$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{\arctan x - x}.$$

Soluzione: Applicando la regola di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{\arctan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x + \cos x - \cos x}{\frac{1}{1+x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\frac{x^2}{1+x^2}} = -\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1.$$