

AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 8 di lunedì 25 novembre 2024

Argomenti: primitive

Esercizio 1.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{3x^3 - x^2} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{3x^3 - x^2} dx = \int \left(\frac{9}{3x-1} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 3 \ln |3x-1| - 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + c.$$

Esercizio 2.

Calcolare la primitiva

$$\int x \ln(x-2) dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int x \ln(x-2) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x-2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \int \left(x+2 + \frac{4}{x-2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln |x-2| + c \right) \\ &= \frac{x^2-4}{2} \ln(x-2) - \frac{x^2}{4} - x + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &\stackrel{(y=\tan \frac{x}{2})}{=} \int \frac{1}{2 + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= \int \frac{2}{3+y^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{y}{\sqrt{3}} \right) + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c. \end{aligned}$$

Esercizio 4.*Calcolare la primitiva*

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(y=\sqrt{x})}{=} \int 2 \cos y dy = 2 \sin y + c = 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

Esercizio 5.*Calcolare la primitiva*

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx \stackrel{(y=e^x)}{=} \int \frac{1}{y + \frac{1}{y} + 2} \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{(y+1)^2} dy = -\frac{1}{y+1} + c = -\frac{1}{e^x + 1} + c.$$

Esercizio 6 (Assegnato per casa).*Calcolare la primitiva*

$$\int x^3 \sin(x^2) dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(x^2) dx &\stackrel{(y=x^2)}{=} \int \frac{y}{2} \sin y dy = \frac{y}{2}(-\cos y) - \int \frac{1}{2}(-\cos y) dy \\ &= -\frac{y}{2} \cos y - \left(\frac{-\sin y}{2} \right) + c \\ &= -\frac{x^2}{2} \cos(x^2) + \frac{\sin(x^2)}{2} + c. \end{aligned}$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa).*Calcolare la primitiva*

$$\int \arctan \sqrt{x} dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int \arctan \sqrt{x} dx &\stackrel{(y=\sqrt{x})}{=} \int 2y \arctan y dy \\ &= y^2 \arctan y - \int y^2 \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= y^2 \arctan y - \int \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy \\ &= y^2 \arctan y - (y - \arctan(y) + c) \\ &= (x + 1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$