

AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 9 di lunedì 2 dicembre 2024

Argomenti: primitive

Esercizio 1.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^3 + x} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^3 + x} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{4x}{1+x^2} \right) dx = x + 4 \log |x| - \arctan x - 2 \log(1+x^2) + c.$$

Esercizio 2.

Calcolare la primitiva

$$\int \sqrt{2 + \sqrt{x}} dx.$$

Soluzione:

$$\int \sqrt{2 + \sqrt{x}} dx \stackrel{(y=\sqrt{2+\sqrt{x}})}{=} \int y (4y^3 - 8y) dy = \frac{4}{5} y^5 - \frac{8}{3} y^3 + c = \left(\frac{4}{5} \sqrt{x} - \frac{16}{15} \right) (2 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c.$$

Esercizio 3.

Calcolare la primitiva

$$\int x^3 \log^2 x dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int x^3 \log^2 x dx &= \frac{x^4}{4} \log^2 x - \int \frac{x^3}{2} \log x dx \\ &= \frac{x^4}{4} \log^2 x - \left(\frac{x^4}{8} \log x - \frac{1}{8} \int x^3 dx \right) \\ &= \frac{x^4}{4} \log^2 x - \left(\frac{x^4}{8} \log x - \frac{x^4}{32} \right) \\ &= \frac{x^4}{4} \left(\log^2 x - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 4.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx \\
 \stackrel{(y = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x)}{=} & \int \frac{\frac{4-y^2}{2(y-1)}}{y + \frac{4-y^2}{2(y-1)}} \frac{-y^2 + 2y - 4}{2(y-1)^2} dy \\
 = & \int \left(\frac{3}{2(y-1)^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{y-1} \right) dy \\
 = & -\frac{3}{2(y-1)} - \frac{y}{2} - \log|y-1| + c. \\
 = & -\frac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}{2} - \log|\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| + c.
 \end{aligned}$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa).

Calcolare la primitiva

$$\int x^3 \log(x^8 + 1) dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \log(x^8 + 1) dx & \stackrel{(y=x^3)}{=} \frac{1}{4} \int \log(y^2 + 1) dy \\
 & = \frac{1}{4} \left(y \log(y^2 + 1) - \int \frac{2y^2}{y^2 + 1} dy \right) \\
 & = \frac{1}{4} \left(y \log(y^2 + 1) - \int \left(2 - \frac{2}{y^2 + 1} \right) dy \right) \\
 & = \frac{1}{4} (y \log(y^2 + 1) - 2y + 2 \arctan y) + c \\
 & = \frac{1}{4} (x^3 \log(x^6 + 1) - 2x^3 + 2 \arctan(x^3)) + c.
 \end{aligned}$$