

AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 11 di Lunedì 4 dicembre 2023

Argomenti: primitive

Esercizio 1.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{2x^3 - x^2} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{2x^3 - x^2} dx = \int \left(\frac{4}{2x-1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \log |2x-1| - 2 \log |x| + \frac{1}{x} + c.$$

Esercizio 2.

Calcolare la primitiva

$$\int x \log(x+2) dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int x \log(x+2) dx &= \frac{x^2}{2} \log(x+2) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(x+2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \log |x+2| + c \right) \\ &= \frac{x^2-4}{2} \log(x+2) - \frac{x^2}{4} + x + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(y=\sqrt{x})}{=} \int 2 \sin y dy = -2 \cos y + c = -2 \cos \sqrt{x} + c.$$

Esercizio 4.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{2 + \sin x} dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2 + \sin x} dx &\stackrel{(y=\tan \frac{x}{2})}{=} \int \frac{1}{2 + \frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy \\
 &= \int \frac{1}{1+y+y^2} dy \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dy \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(y + \frac{1}{2} \right) \right) + c \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c.
 \end{aligned}$$

Esercizio 5.

Calcolare la primitiva

$$\int x^2 \arcsin x dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \arcsin x dx &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &\stackrel{(y=1-x^2)}{=} \frac{x^3}{3} \arcsin x - \int \frac{-(1-y)}{6\sqrt{y}} dy \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{6} \int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{y} \right) + c \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + c.
 \end{aligned}$$

Esercizio 6.

Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} dx.$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} dx \stackrel{(y=e^x)}{=} \int \frac{1}{y + \frac{1}{y} - 2} \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{(y-1)^2} dy = -\frac{1}{y-1} + c = \frac{1}{1-e^x} + c.$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa).

Calcolare la primitiva

$$\int x^3 \cos(x^2) dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \cos(x^2) dx &\stackrel{(y=x^2)}{=} \int \frac{y}{2} \cos y dy = \frac{y}{2} \sin y - \int \frac{1}{2} \sin y dy \\
 &= \frac{y}{2} \sin y - \left(\frac{-\cos y}{2} \right) + c \\
 &= \frac{x^2}{2} \sin(x^2) + \frac{\cos(x^2)}{2} + c.
 \end{aligned}$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa).
Calcolare la primitiva

$$\int \arctan \sqrt[3]{x} dx.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int \arctan \sqrt[3]{x} dx &\stackrel{(y=\sqrt[3]{x})}{=} \int 3y^2 \arctan y dy \\ &= y^3 \arctan y - \int y^3 \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= y^3 \arctan y - \int \left(y - \frac{y}{y^2+1} \right) dy \\ &= y^3 \arctan y - \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\log(y^2+1)}{2} + c \right) \\ &= x \arctan \sqrt[3]{x} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{\log(x^{\frac{2}{3}}+1)}{2} + c. \end{aligned}$$