AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 2 di Mercoledì 11 ottobre 2023

Argomenti: estremo superiore ed inferiore

Esercizio 1.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\min A = \inf A = 0$ perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\frac{n-1}{n+1} \geq \frac{1-1}{1+1} = 0$.
$\sup A = 1$ perché $\frac{n-1}{n+1} \leq 1$ per ogni n e inoltre, dato $\varepsilon > 0$, avremo $\frac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon$, cioè $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$, scegliendo $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$; non si tratta di un massimo perché non esiste nessun valore per cui $\frac{n-1}{n+1} = 1$

Esercizio.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\min A = \inf A = -1$ perché, scrivendo $A = A_+ \cup A_-$ con

$$A_+ := \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_- := \left\{ -\frac{1}{2n-1} ; n \in \mathbb{N} \right\},$$

avremo $x > 0$ e $y \geq \frac{-}{1} \in A_-$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.
$\max A = \inf A = \frac{1}{2}$ perché $x \leq \frac{1}{2} \in A_+$ e $y < 0$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.

Esercizio 2.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \sin \frac{\pi}{(n+1)^2} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = \max A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ perché $0 \le \dfrac{\pi}{(n+1)^2} \le \dfrac{\pi}{4}$ per ogni n e dunque $0 \le \sin\dfrac{\pi}{(n+1)^2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{(1+1)^2}$.
$\inf A = 0$ perché $\sin\dfrac{\pi}{(n+1)^2} \ge 0$ per ogni n e inoltre, dato $\varepsilon > 0$, esisterà $\delta > 0$ tale che $\sin\delta < \varepsilon$ e quindi, prendendo $n > \sqrt{\dfrac{\pi}{\delta}} - 1$, avremo $\dfrac{\pi}{(n+1)^2} < \delta$ e dunque $\sin\dfrac{\pi}{(n+1)^2} < \varepsilon$; non è un massimo perché vale sempre la disugliaglianza stretta $\sin\dfrac{\pi}{(n+1)^2} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{\sqrt{n} - \sqrt{m} : \, n, m \in \mathbb{N}, \, n > m\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = +\infty$ perché per $m = 1$ avrò $\sqrt{n} - 1$ e dunque, fissato $M > 0$, scegliendo $n > (1+M)^2$ avrò $\sqrt{n} - 1 > M$.
$\inf A = 0$ perché $\sqrt{n} - \sqrt{m} > 0$ per $n > m$ e poi, scegliendo $m = n+1$, avrò $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ che, prendendo $n > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, verifica $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$; non è un massimo perché ho sempre la disuguaglianza stretta.

Esercizio 4.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} : \, -3 < x^2 - 4x \le 5\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = \max A = -5$ segue immediatamente scrivendo l'insieme come

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \, (x-1)(x+3) > 0, \, (x+1)(x+5) \le 0\} = ((-\infty, 1) \cup (3, +\infty)) \cap [-1, 5] = [-1, 1) \cup (3, 5].$$

$\inf A = \min A = -1$ segue ragionando allo stesso modo.

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{(-1)^n 2^{-\frac{1}{n}} \, : \, n \in \mathbb{N}\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = 1$ perché per ogni n vale $(-1)^n 2^{-\frac{1}{n}} \le 2^{-\frac{1}{n}} < 1$, e dato $\varepsilon > 0$ avremo $(-1)^n 2^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$ per n pari che verifichi $-\dfrac{1}{n} > \log_2(1-\varepsilon)$, cioè $n > \dfrac{1}{\log_2 \frac{1}{1-\varepsilon}}$; non è un minimo perché vale sempre la disugliaglianza stretta.
$\inf A = 1$, e non è un minimo, perché, come prima, $(-1)^n 2^{-\frac{1}{n}} \ge 2^{-\frac{1}{n}} > -1$ e avremo $(-1)^n 2^{-\frac{1}{n}} = -2^{-\frac{1}{n}} < -1 + \varepsilon$ per n dispari tale che $n > \dfrac{1}{\log_2 \frac{1}{1-\varepsilon}}$.

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{\frac{2x-1}{x-3} : x \in \mathbb{R}, \, x > 3\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = +\infty$ perché, preso $M > 0$, per $x < 3 + \frac{5}{M-2}$ avremo $\frac{5}{x-3} > M - 2$ e dunque $\frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3} > M$.

$\inf A = 2$ perché $\frac{2x-1}{x-3} > 2$ per $x \in A$ e, preso $\varepsilon > 0$, $x > 3 + \frac{5}{\varepsilon}$ verifica $\frac{5}{x-3} < \varepsilon$, da cui $\frac{2x-1}{x-3} < 2 + \varepsilon$; non è un minimo perché la disuguaglianza è stretta.