AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 3 di Venerdì 13 ottobre 2023

Argomenti: limiti di successioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\arctan n-n\sin n}$$

Soluzione: Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\arctan n-n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{\arctan n-\frac{\sin n}{n}}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, otterremo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\arctan n-n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\arctan n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\arctan n}=\frac{2}{\pi}.$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$$

Soluzione: Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+1}e^{\cos n}$$

Soluzione: Poiché $\frac{1}{e} \leq e^{\cos n} \leq e$, allora

$$\frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} e^{\cos n} \leq e \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1}.$$

Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} = +\infty$, concludiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} e^{\cos n} = +\infty$.

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n + \sqrt{n} + 3}{n-4}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n + \sqrt{n} + 3}{n-4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n}}{1 - \frac{4}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n.$$

Quest'ultimo limite tuttavia non esiste perché per n pari vale 1 mentre per n dispari vale -1, dunque il limite di partenza non esiste.

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(5n^2+3\right)}{\ln\left(n^3-n\right)}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(5n^2+3\right)}{\ln\left(n^3-n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n + \ln\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}{3\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{\ln\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}{\ln n}}{3 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^{\sqrt{n}} + 3^n + n^5 2^n}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^{\sqrt{n}} + 3^n + n^5 2^n} &= 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^{\sqrt{n}}}{3^n} + 1 + n^5 \frac{2^n}{3^n}} \\
&= 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^{\sqrt{n} - n\log_4 3} + 1 + n^5 \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\
&= 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 7.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln((n+1)!) - \ln((n-1)!)}{\sqrt[3]{n}}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln((n+1)!) - \ln((n-1)!)}{\sqrt[3]{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{(n+1)!}{(n-1)!}}{\sqrt[3]{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln((n+1)n)}{\sqrt[3]{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)$$

Soluzione: Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{4+\frac{1}{n}-4}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 9 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(3^{2n}+\pi^n\right)}{\ln\left(2^{3n}+e^n\right)}$$

Soluzione: Utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(3^{2n}+\pi^n\right)}{\ln\left(2^{3n}+e^n\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(3^{2n}\right)+\ln\left(1+\frac{\pi^n}{3^{2n}}\right)}{\ln\left(2^{3n}\right)+\ln\left(1+\frac{e^n}{2^{3n}}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2\ln 3)n+\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{3^2}\right)^n\right)}{(3\ln 2)n+\ln\left(1+\left(\frac{e}{2^3}\right)^n\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln 3+\frac{\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{9}\right)^n\right)}{n}}{3\ln 2+\frac{\ln\left(1+\left(\frac{e}{8}\right)^n\right)}{n}} \\
&= \frac{2\ln 3}{3\ln 2}.
\end{aligned}$$