

AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 4 di Mercoledì 18 ottobre 2023

Argomenti: limiti di successioni

Esercizio 1.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \sqrt[n]{n^n + 1}}{(n+1)! - e^n}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \sqrt[n]{n^n + 1}}{(n+1)! - e^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n + 1}}{n + 1 - \frac{e^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^n}}}{n + 1 - \frac{e^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^n}}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{e^n}{n \cdot n!}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)} + n^{\cos(n^3)}}.$$

Soluzione: Poiché $0 \leq \arctan(n^2) \leq \frac{\pi}{2}$, $|\cos(n^3)| \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} &\leq \sqrt[n]{n^{\frac{\pi}{2}} + n} \leq \sqrt[n]{2n^{\frac{\pi}{2}}}, \\ \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} &\geq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

ed essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^{\frac{\pi}{2}}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} = 1.$$

Esercizio 3.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Soluzione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln(\sqrt{n})}}{e^{\ln((\ln n)^{\ln n})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2} \ln n - \ln n (\ln \ln n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} - \ln \ln n)(\ln n)} = e^{-\infty} = 0.$$

Esercizio 4.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n}{n^2 + 3} \right)^{n^2}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 2n}{n^2 + 3} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2n + 3}{n^2 + 3} \right)^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{2n + 3}{n^2 + 1} \right)^{-\frac{n^2 + 1}{2n + 3}} \right)^{-\frac{n^2(2n + 3)}{n^2 + 1}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2n + 3}{n^2 + 1} \right)^{-\frac{n^2 + 1}{2n + 3}} \right)^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2(2n + 3)}{n^2 + 1}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2(2n + 3)}{n^2 + 1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 5.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n \ln(1 + e^n) - ne^n).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^n \ln(1 + e^n) - ne^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^n \ln(e^n(1 + e^{-n})) - ne^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^n (n + \ln(1 + e^{-n})) - ne^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \ln(1 + e^{-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-n})}{e^{-n}}. \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esercizio 6.

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi^n - \pi^{n - \frac{1}{\pi^n}} \right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi^n - \pi^{n - \frac{1}{\pi^n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \pi^{-\frac{1}{\pi^n}}}{\frac{1}{\pi^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\frac{\ln \pi}{\pi^n}}}{\frac{1}{\pi^n}} \\ &= \ln \pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{\ln \pi}{\pi^n}} - 1}{-\frac{\ln \pi}{\pi^n}} \\ &= \ln \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa).

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3^n)}{n \ln n - \ln n!}.$$

Soluzione: Poiché $\sin(3^n)$ è limitata e $n \ln n - \ln n! = \ln \frac{n^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, allora dal teorema dei Carabinieri concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3^n)}{n \ln n - \ln n!} = 0.$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa).

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2n-1)}{\ln n} \right)^{\ln(n^3+n^2)}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2n-1)}{\ln n} \right)^{\ln(n^3+n^2)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n + \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^{\ln(n^3) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^{3 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^{\frac{\ln n}{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}} \right)^{\frac{3 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{\ln n}{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \right)^{\frac{\ln n}{\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}} \right)^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)) \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n}} \\ &= e^{3 \ln 2} \\ &= 8. \end{aligned}$$