AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 7 di Venerdì 27 ottobre 2023

Argomenti: studio di funzioni

Esercizio 1.
Studiare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{1}{1-\log(x-1)}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo e il denominatore è diverso da 0, dunque il dominio è

$$(1,e+1)\cup(e+1,+\infty).$$

Intersezione assi e segno: Poiché il numeratore è sempre positivo, studiando il segno del denominatore otteniamo che

$$\begin{array}{lcl} f(x)>0 & \iff & x\in(e+1,+\infty) \\ f(x)<0 & \iff & x\in(-\infty,e+1); \end{array}$$

inoltre, essendo la funzione sempre diversa da 0 e non definita in $x=0$, otteniamo che

la funzione NON interseca gli assi.

Asintoti: Poiché $\lim_{x\to 1^-}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ e $\lim_{x\to e+1^\pm}=\mp\infty$, deduciamo che gli asintoti di f sono

$x=e+1$ (verticale), $\qquad y=0$ (orizzontale).

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)(1-\log(x-1))^2}$ otteniamo che

$f(x)$ è crescente se $x\in(1,e+1)\cup(e+1,+\infty)$

$f(x)$ NON ha massimi né minimi.

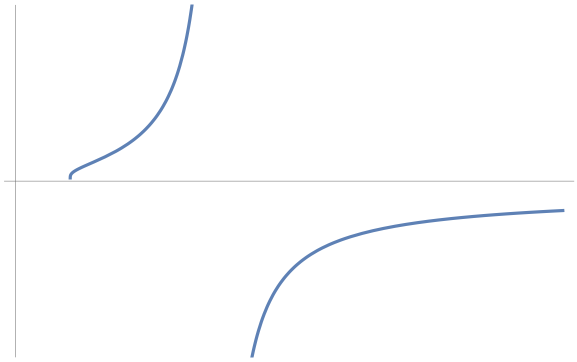
Grafico:

Esercizio 2.
Studiare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2+4x+4}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è ben definita fintanto che il denominatore è diverso da 0, dunque il dominio è

$$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty).$$



Intersezione assi e segno: Poiché il denominatore è sempre maggiore o uguale di 0, studiando il segno del numeratore otteniamo che

$$\begin{array}{lcl} f(x) > 0 & \iff & x \in (1, +\infty) \\ f(x) = 0 & \iff & x = 1 \\ f(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1); \end{array}$$

la funzione interseca gli assi nei punto

$$(1, 0), \left(0, -\frac{1}{4}\right).$$

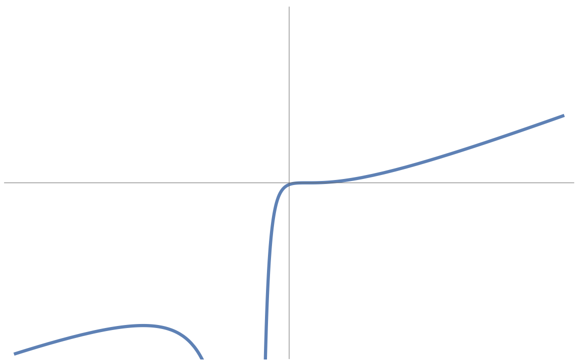
Asintoti: Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = -7$ e $\lim_{x\to\pm-2^{\pm}} f(x) = -\infty$, gli asintoti di f sono

$$x = -2 \text{ (verticale)}, \qquad y = x - 7 \text{ (obliquo)}.$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente se} & x \in (-\infty, -8) \cup (-2, +\infty) \\ f(x) & \text{è decrescente se} & x \in (-8, -2) \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = -8. \end{array}$$

Grafico:



Esercizio 3 (Assegnato per casa)**.**
Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{2} - 1}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è definita quando gli argomenti delle due radici sono maggiori o uguali a 0, dunque il dominio è

$$[2, +\infty).$$

Intersezione assi e segno: Poiché la funzione è sempre positiva sul suo insieme di definizione, allora

$$f(x) > 0 \iff x \in (-2, +\infty);$$

inoltre, essendo f non definita in 0, avremo che

$$f \text{ NON interseca gli assi.}$$

Asintoti: Poiché $\lim_{x\to 2} f(x) = 2\sqrt{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, allora

$$f \text{ NON ha asintoti.}$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente se} & x \in \left(\dfrac{16}{7}, +\infty\right) \\ f(x) & \text{è decrescente se} & x \in \left[2, \dfrac{16}{7}\right) \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = \dfrac{16}{7}. \end{array}$$

Grafico: