AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercizi assegnati per casa

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan\left(x^2\right)}{(\log(\cos x))^3}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-\arctan\left(x^2\right)}{(\log(\cos x))^3} &= \frac{x^2-\left(x^2-\frac{x^6}{3}+o\left(x^6\right)\right)}{\cos x-1+o(\cos x-1)}\\
&= \frac{\frac{x^6}{3}+o\left(x^6\right)}{\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)^3}\\
&= \frac{\frac{x^6}{3}+o\left(x^6\right)}{-\frac{x^6}{8}+o\left(x^6\right)}\\
&\underset{x\to 0}{\to} -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-3^x-2^x+1}{\left(\tan\sqrt[3]{x}\right)^6}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
&\frac{6^x-3^x-2^x+1}{\left(\tan\sqrt[3]{x}\right)^6}\\
=\;&\frac{e^{x\log 6}-e^{x\log 3}-e^{x\log 2}+1}{\left(\sqrt[3]{x}+o\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^6}\\
=\;&\frac{\left(1+x\log 6+\frac{(x\log 6)^2}{2}+o\left((x\log 6)^2\right)\right)-\left(1+x\log 3+\frac{(x\log 3)^2}{2}+o\left((x\log 3)^2\right)\right)-\left(1+x\log 2+\frac{(x\log 2)^2}{2}\right.}{x^2+o\left(x^2\right)}\\
=\;&\frac{\left(1+(\log 2+\log 3)x+\frac{\log^2 3+\log^2 2+2\log 2\log 3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)-\left(1+\log 3x+\frac{\log^2 3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)-\left(1+\log 2x\right.}{x^2+o\left(x^2\right)}\\
=\;&\frac{\log 2\log 3x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\\
=\;&\log 2\log 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\log(1+x)-\log(1+2x)}{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\sqrt[3]{1+x^2}}}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2\log(1+x)-\log(1+2x)}{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\sqrt[3]{1+x^2}}} \\
= \quad & \frac{1}{e}\frac{2\log(1+x)-\log(1+2x)}{e^{\sqrt{1+x^2}-1}-e^{\sqrt[3]{1+x^2}-1}} \\
= \quad & \frac{1}{e}\frac{2\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-\left(2x-2x^2+o\left(x^2\right)\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2}-1+o\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\right)-\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}-1+o\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\right)} \\
= \quad & \frac{1}{e}\frac{x^2+o\left(x^2\right)}{\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-\left(\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right)} \\
= \quad & \frac{1}{e}\frac{x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)} \\
\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad & \frac{6}{e}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.
Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{4e^{-x}-e^{x}}\mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{4e^{-x}-e^{x}}\mathrm{d}x \quad &= \quad \int \frac{e^x}{4-e^{2x}}\mathrm{d}x \\
&\overset{(y=e^x)}{=} \quad \int \frac{1}{4-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \quad \int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{y+2}-\frac{1}{4}\frac{1}{y-2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \quad \frac{1}{4}\log|y+2|-\frac{1}{4}\log|y-2|+c \\
&= \quad \frac{1}{4}\log|e^x+2|-\frac{1}{4}\log|e^x-2|+c
\end{aligned}
$$

Esercizio 5.
Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-2}\mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-2}\mathrm{d}x \quad &\overset{\left(y=-x+\sqrt{x^2+5}\right)}{=} \quad \int \frac{1}{y+\frac{5-y^2}{2y}-2}\left(-\frac{5+y^2}{2y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \quad \int \left(-\frac{1}{y}-\frac{4}{(y-2)^2+1}\right) \\
&= \quad -\log|y|-4\arctan(y-2)+c \\
&= \quad -\log\left|-x+\sqrt{x^2+5}\right|-4\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+5}-2\right)+c.
\end{aligned}
$$

Esercizio 6.
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&\overset{(y=\cos x)}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}y-1\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{2}\log|y+1| - \frac{1}{2}\log|y-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\log 3.
\end{aligned}
$$

Esercizio 7.
Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} x^2 e^{|x|}\mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} x^2 e^{|x|}\mathrm{d}x &= \int_0^2 x^2 e^x\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} x^2 e^{-x}\mathrm{d}x \\
(y=-x) &= \int_0^2 x^2 e^x\mathrm{d}x + \int_0^2 y^2 e^y\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\left[x^2e^x\right]_0^2 - \int_0^2 2xe^x\mathrm{d}x\right) \\
&= 8e^2 - 4\int_0^2 xe^x\mathrm{d}x \\
&= 8e^2 - 4\left([xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\mathrm{d}x\right) \\
&= 8e^2 - 4\left(2e^2 - [e^x]_0^2\right) \\
&= 4e^2 - 4.
\end{aligned}
$$

Esercizio 8.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + e^t\log(1+t) \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\int_0^t -1\mathrm{d}s}\left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s -1\mathrm{d}r} e^s\log(1+s)\mathrm{d}s\right) \\
&= e^t\left(1 + \int_0^t \log(1+s)\mathrm{d}s\right) \\
&= e^t\left(1 + (1+t)\log(1+t) - t\right).
\end{aligned}
$$

Esercizio 9.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{(t+1)x(t)}} \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
x'(t)\sqrt{x(t)} &= \frac{t}{\sqrt{t+1}} \\
&\Rightarrow \\
\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t+1} + \frac{4}{3} &= \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{\tau+1}}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_1^{x(t)} \sqrt{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x(t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow \quad x(t) = \left((t+1)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+1} + 3\right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 10.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = te^t \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ ha per radici $\lambda = 2, 3$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono $c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$. La soluzione particolare va cercata del tipo $x(t) = ae^t + bte^t$ e avremo $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = (2a - 3b)e^t + 2be^t$, dunque $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ e la soluzione generale è $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{te^t}{2}$. Con le condizioni iniziali avremo $\begin{cases} x'(0) = 2c_1 + 3c_2 + \frac{5}{4} \\ x(0) = c_1 + c_2 + \frac{3}{4} \end{cases}$, dunque $c_1 = 1, c_2 = -\frac{3}{4}$ e la soluzione ottenuta è

$$x(t) = e^{2t} - \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{te^t}{2}.$$