Per verificare che una affermazione

è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n \equiv n^2 + n$ è divisibile per 2

è vera

① Verificare l'affermazione per $n = 1$

(Base dell'induzione)

② Mostrare che se l'affermazione è vera

per ogni $n \leq k$ (con $k \in \mathbb{N}$) allora

è vera anche per $n = k+1$

$\vdash\!\dashv$

Proviamo con l'esempio

$S_1 \equiv 1 + 1 = 2$ è divisibile per 2 VERO

Supponiamo che sia vero S_k con $k \geq 1$

verifichiamo S_{k+1}

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$$

devo far vedere che è pari

$$= \underbrace{k^2 + k}_{A} + \underbrace{2(k+1)}_{B}$$

pari per induzione + pari

||

pari

Il primo addendo (A) è pari per l'ipotesi induttiva, il secondo (B) è pari perché è scritto come 2 · (numero naturale)

dato che la somma di due # pari è pari si ha la TESI

ALTRO ESEMPIO

Verificare che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ è divisibile per 6

$S_1 \equiv 1^3 - 1 = 0$ ✓

$S_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ è divisibile per 6 ?

$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k$

$= \underbrace{k^3 - k}_{(A)} + \underbrace{3(k^2 + k)}_{(B)}$

(A) è divisibile per 6 per induzione

(B) è divisibile per 6 è 3 · (NUMERO PARI)

[Dall'esercizio precedente $k^2 + k$ è pari]

Esercizio

Verificare che $\forall n \in \mathbb{N}$ è vera S_n:

$$\sum_{h=1}^{n} h := 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

S_1: $$\sum_{h=1}^{1} h = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad \checkmark$$

Suppongo che l'affermazione sia vera $\forall n \leq k$ con $k \geq 1$ dimostro S_{k+1}

È vero che $$\sum_{h=1}^{k+1} h = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \quad ?$$

$$\sum_{h=1}^{k+1} h = \sum_{h=1}^{k} h + (k+1)$$

(queste sono le proprietà base delle

somme $\sum_{h=1}^{k+1} f(h) = f(1) + \underbrace{f(2) + \dots + f(k)}_{= \sum_{h=1}^{k} f(h)} + f(k+1)$

quindi per l'ipotesi induttiva

$$\sum_{h=1}^{k+1} h = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ho verificato quindi

S_n per $n = k+1$

$\longleftarrow\!\!\!/$

Verificare che $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\longleftarrow\!\!\!/$

Verificare che $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{h=0}^{n} 2h+1 = (n+1)^2$$

Soluzione del primo:

$$S_1 = \sum_{h=1}^{1} h^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad V$$

per induzione suppongo vero fino a k

verifico S_{k+1}

È vero che $$\sum_{h=1}^{k+1} h^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} \; ?$$

$$\sum_{h=1}^{k+1} h^2 = \sum_{h=1}^{k} h^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

per l'ipotesi induttiva

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$ (espando tutto)

$$\overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

(S_{k+1} è verificata se vale questo)

espandendo $(k+1)(k+2)(2k+3)$ ottengo

$$(k^2+3k+2)(2k+3) = 2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6$$

$$= 2k^3 + 9k^2 + 13k + 6$$ quindi l'uguaglianza

è verificata!

Soluzione 2.

$$\sum_{h=0}^{n} (2h+1) = (n+1)^2$$

Nota Bene

$$\sum_{h=0}^{n} (2h+1) = \underset{h=0}{\underset{\downarrow}{(2\cdot 0+1)}} + \underset{h=1}{\underset{\downarrow}{(2\cdot 1+1)}} + \dots + \underset{h=n}{\underset{\downarrow}{(2\cdot n+1)}}$$

S_1 :

$$\sum_{h=0}^{1} (2h+1) = 2\cdot 0+1 + 2\cdot 1+1 = 4 = (1+1)^2$$

è verificata!

suppongo valga $S_k \Rightarrow$ dimostro S_{k+1}

Cosa dice S_{k+1}?

$$\sum_{h=0}^{k+1} (2h+1) \overset{?}{=} (k+1+1)^2$$

procedo come prima

$$\sum_{h=0}^{k+1} (2h+1) = \sum_{h=0}^{k} (2h+1) + (2(k+1)+1)$$

$h = k+1$

hp. induttivo

$$= (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 = ((k+1)+1)^2$$

$\blacksquare$