$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(2^{3n}+5^n\right)}{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad (= \ln 8)$$

Il termine dominante fra $2^{3n} = 8^n$ e 5^n è 8^n

$\left(5^n \ll 8^n \text{ dato che } \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0\right)$

per $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ uso la formula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \iff \frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1 \text{ se } a_n \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(2^{3n}+5^n\right)}{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(8^n\left(1+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)\right)}{n \; \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(8^n) + \ln\left(1+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln 8 + \ln\left(1+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)}{n} =$$

$$\ln 8 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)}{n} = \frac{\ln(1)}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{\log(n^n)}.$$

$(=1)$

Osservazione $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \leq n^n$

quindi $\log(n!) \leq \log(n^n)$ e il limite è ≤ 1

Riscaldamento: dimostriamo che

$$\forall\, n \geq 2 \qquad n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

dividiamo i numeri da 1 a n in due gruppi

gruppo 1 quelli $\geq \frac{n}{2}$

gruppo 2 quelli $< \frac{n}{2}$

$$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left[\frac{n}{2}\right]}_{\text{gruppo 1}} \;\Big|_{\frac{n}{2}}\; \underbrace{\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) \cdot 1}_{\text{gruppo due}}$$

per ipotesi se $n-k \in$ gruppo 1

$n-k \geq \frac{n}{2}$ se $n-k \in$ gruppo 2

$n-k \geq 1$

quindi

$$\begin{array}{ccccccc|ccc}
n! & = & n & \cdot (n-1) & \cdot (n-2) \cdots & & \left[\frac{n}{2}\right] & \left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) \cdot & & 1 \\
\vee\mid & & \vee\mid & \vee\mid & & & & \vee\mid & \ldots & \vee\mid \\
\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & = & \frac{n}{2} & \cdot \frac{n}{2} \cdot & \ldots\ldots & & \frac{n}{2} & 1 \cdot & 1 & \cdot 1
\end{array}$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ volte

In generale $\forall \; \varepsilon \in (0,1)$ per $\varepsilon n \geq 1$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots [\varepsilon n] \;\Big|\; ([\varepsilon n]-1) \cdots 1$$

gruppo 1 — gruppo due

εn

$$\begin{array}{ccccccccc} n! & = & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots [\varepsilon n] & \Big| & ([\varepsilon n]-1) & \cdots & 1 \\ \vee\!| & & \vee\!| \quad \vee\!| \qquad\qquad \vee\!| & & \vee\!| & \cdots & \vee\!| \\ (\varepsilon n)^{n-\varepsilon n} & = & \underbrace{\varepsilon n \cdot \varepsilon n \cdots\cdots \varepsilon n}_{n-[\varepsilon n] \text{ volte}} & & 1 \cdot 1 & & \cdot 1 \end{array}$$

quindi
$$\frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} \geq \frac{\ln\left(\varepsilon n^{n(1-\varepsilon)}\right)}{\ln(n^n)}$$

definitivamente $\Rightarrow$

$$1 \geq \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} \geq \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left((\varepsilon n)^{n(1-\varepsilon)}\right)}{\ln(n^n)}$$

(Teorema del confronto)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left((\varepsilon n)^{n(1-\varepsilon)}\right)}{\ln(n^n)} = \lim \frac{n(1-\varepsilon)\ln(\varepsilon n)}{n\ \ln(n)}$$

$$= (1-\varepsilon)\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)+\ln(\varepsilon)}{\ln(n)} = 1-\varepsilon$$

quindi $\quad 1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} \geq (1-\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon \in (0,1) \Rightarrow$ il limite è $= 1$

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right) \qquad \left(= \frac{1}{2}\right)$$

Razionalizziamo

$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} =$

$$\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$$

$$= \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} =$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(4n^2+n)}{\log(5n^3-2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2) + \log\left(1+\frac{1}{4n}\right) + \ln 4}{\log(n^3) + \log\left(1 - \frac{2}{5n^3}\right) + \ln 5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(n)}{3\ln(n)} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^{\sqrt{n}} + 4^n + n^2 3^n}$$

il termine dominante dell'argomento della radice n-ma è 4^n

infatti $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{\frac{n}{2}} + n^2 3^n}{4^n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{\frac{n}{2}}}{4^n} + \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

quindi

$$\left(5^{n^{\frac{1}{2}}} + 4^n + n^2 3^n\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$4\left(1 + \frac{5^{n^{\frac{1}{2}}} + n^2 3^n}{4^n}\right)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 4 \cdot (1+0)^0 =$$

$$\longleftarrow 1 \qquad\qquad 4 \cdot 1^0 = 4$$

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\sin(n)}{3n^2 + n\cos(n^3+1)} \qquad \left(= \frac{1}{3}\right)$$

Applico il teorema dei Carabinieri

$$\frac{n^2 - n}{3n^2 + n} \leq \frac{n^2 + n\sin(n)}{3n^2 + n\cos(n^3+1)} \leq \frac{n^2 + n}{3n^2 - n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{3}$$

$$\longleftarrow 1$$

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-5}\right)^{2n-1} \qquad (= e^6)$$

REM se $a_n \to 0$

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \longrightarrow e$$

quindi pongo $\dfrac{3n+4}{3n-5} = 1 + a_n$

(NB. $\dfrac{3n+4}{3n-5} \longrightarrow 1$ per $n\to\infty$)

$$a_n = \frac{3n+4}{3n-5} - 1 = \frac{3n+4-3n+5}{3n-5}$$

$$= \frac{9}{3n-5} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+4}{3n-5} \right)^{2n-1} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + a_n \right)^{\frac{1}{a_n} \cdot (2n-1) \cdot a_n} =$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \right)^{\lim\limits_{n \to \infty} (2n-1)\, a_n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to \infty} (2n-1) \cdot \frac{9}{3n-5}} =$$

$$e^{9 \cdot \frac{2}{3}} = e^{6}$$

$$\longleftrightarrow$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\left(\sin 3x^2 \right)}{\cos(2x) - 1} \qquad \left(= -\frac{3}{2} \right)$$

Ricordo che $\dfrac{tg(f(x))}{f(x)} \to 1$ se $f(x) \to 0$

$$\frac{\sin(f(x))}{f(x)} \to 1 \; ; \quad \frac{1-\cos(f(x))}{f^2(x)} \to \frac{1}{2}$$

(sempre se $f(x) \to 0$)

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin 3x^2)}{\cos(2x)-1} =$$

$$\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(3x^2))}{\sin(3x^2)}}{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{(2x)^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{4x^2}$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

Attenzione

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{A}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} + \overset{B}{\sin(x)}}{3x}$$

Su A $\quad \frac{1}{x} \to 0$ se $x \to \infty$ quindi

posso usare la formula asintotica

Su B NO !

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin(x)}{3x} =$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{3x} =$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} + \lim_{x\to\infty} \underbrace{\sin x}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\text{infinitesimo}}$$

limite
notevole

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{3}$$

Limite con il logaritmo

se $f(x) \to 0$ $\qquad \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} \to 1$

Infatti

$$\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} =$$

$$\ln\left((1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right) \to \ln(e) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \ln(x) \quad (=0)$$

qui formula asintot

qui No!

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

limite notevole

gerarchie degli infiniti

$$= 1 \cdot 0 = 0$$