$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left[1 + \ln(1+3x^2)\right] \cos(2x) \right]^{\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+x^2}}}$$

$$\left(\left[(1 + \ln(1)) \cos(0) \right]^{\frac{1}{0^-}} \Rightarrow 1^{-\infty} \right)$$

forma indeterminata

① Remember $\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} \to e$ se $f(x) \to 0$

Poniamo

$$\left[1+\ln(1+3x^2\right] \cos(2x) = f(x) + 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \left[1+\ln(1+3x^2\right] \cos(2x) - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left[1 + \ln(1+3x^2)\right] \cos(2x) \right]^{\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+x^2}}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^+} \left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} \right)^{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x-(x+x^2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}\right)} = e^0 = 1$$

calcoliamo quindi il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x-(x+x^2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)+\cos(2x)\ln(1+3x^2)-1}{-x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}\right) = 0$$

(Uso 2 limiti notevoli)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)-1}{4x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2} = 1$$

OSSERVAZIONE:

Non è detto che convenga dividere

$$\left(\cos(2x)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}}} \qquad \left(1+\ln(1+3x^2)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}}}$$

e fare i due limiti separatamente

$$\left(\cos(2x)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}}} = \left(1+\cos(2x)-1\right)^{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}}{-x^2}}$$

$$= \left[\left(1+[\cos 2x-1]\right)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\frac{\cos(2x)-1}{-x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}\right)}$$

$$= e^{0} = 1$$

.... stesso per il secondo limite

$\Rightarrow$ il limite di partenza è $1 \cdot 1 = 1$

però NON è detto che si arrivi a un risultato

ALTRO Esempio

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(1 + \sin(2x) \right) \left(1 - \sin(x) \right) \right]^{\frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = (1 + \sin 2x)(1 - \sin x) - 1$$

$$= \sin 2x - \sin x - \sin 2x \sin x$$

quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(1 + \sin(2x) \right) \left(1 - \sin x \right) \right]^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x) - \sin(x) - \sin 2x \sin x}{x^2}} = e^{\infty} = \infty$$

Se faccio separatamente i due limiti

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \sin(2x) \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

quindi ho ancora una forma indet.