

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Tutorato 1

Esercizio 1. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti identità.

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$
2. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
4. $\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 1$
5. $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Esercizio 2. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti disuguaglianze.

1. $n^3 > 2n - 2$ per ogni $n \geq 1$
2. $2^n > n^3$ per ogni $n \geq 10$
3. $3^n > 2^n n$ per ogni $n \geq 2$

Esercizio 3. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni.

1. $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$
2. $2^{2n+1} + 5^{2n+1}$ è divisibile per 7 per ogni $n \geq 0$
3. $n^2 - 1$ è divisibile per 8 per ogni $n \geq 1$ dispari
4. $2^n + 1$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$ dispari
5. Date un insieme X , l'insieme delle parti di X è definito come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X e si denota come $\mathcal{P}(X)$. Dato un insieme X di cardinalità finita n , la cardinalità di $\mathcal{P}(X)$ è 2^n .

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti in maniera ricorsiva nel seguente modo: definiamo $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e in generale $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$. I primi 10 numeri di Fibonacci sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni riguardo i numeri di Fibonacci.

1. $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ per ogni $n \geq 1$
2. $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$
3. $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ per ogni $n \geq 1$
4. $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ per ogni $n \geq 1$
5. 5 divide f_{5n} per ogni $n \geq 0$
6. $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ per ogni $n \geq 0$