Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Tutorato 2

Esercizio 1. Dato l'insieme $A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$, dimostrare che $\sup A = 1$, $\inf A = -1$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Esercizio 2. Dato l'insieme $B = \left\{ \frac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \; : \; x \in [1, +\infty) \right\}$, dimostrare che $\sup B = 1$, $\inf B = 0$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Esercizio 3. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente/inferiormente, in caso affermativo calcolare l'esteremo superiore/inferiore, e stabilire se si tratta di un massimo/minimo.

1. $\left\{ \frac{n-1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $\left\{ \frac{2n}{n^2+1} \; : \; n \in \mathbb{Z} \right\}$
3. $\left\{ (-1)^n \frac{2n-1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$
4. $\left\{ n^2 e^{-n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$
5. $\left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; \sqrt{x^2+2} \leq x+3 \right\}$
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; \frac{x^2-5x+6}{x^3-1} > 0 \right\}$

7. $\left\{x \in \mathbb{Q} \;:\; |x - 5x^2 + 3| \le 2x\right\}$

8. $\left\{x \in \mathbb{Q} \;:\; \log(1 + e^x) \le 2x\right\}$

9. $\left\{\sin\left(\frac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi[x]}{3}\right) \;:\; x \in \mathbb{R}\right\}$

10. $\left\{\left\{\frac{2\,[x]}{7}\right\} : \; x \in \mathbb{R}\right\}$

11. $\left\{\operatorname{sgn}(6 - |x|)\left\{\frac{5[x]}{6}\right\} : \; x \in \mathbb{Q}\right\}$

12. $\left\{\left(\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato. Si definisca il diametro di A nel seguente modo:

$$\operatorname{diam} A = \sup\{|x - y| \;:\; x, y \in A\}$$

Dimostrare che $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.

Esercizio 5. Sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi non vuoti e limitati di $\mathbb{R}$. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$, e si pone

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

allora valgono:

$$\inf A = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf E_n, \qquad \sup A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup E_n.$$

2. Se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$, e si pone

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

allora valgono:

$$\inf A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf E_n, \qquad \sup A = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup E_n.$$