Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 2

Esercizio 1. Dato l'insieme $A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \;:\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}$, dimostrare che $\sup A = 1$, $\inf A = -1$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi:

- $(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ con n pari (se n è dispari la disequazione non è soddisfatta).

- $(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} > -1$ per ogni $n \geq 1$, quindi -1 è un minorante ma non un minimo. Dimostriamo che -1 è l'inf: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \leq -1 + \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ con n dispari (se n è pari la disequazione non è soddisfatta).

Esercizio 2. Dato l'insieme $B = \left\{ \frac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \;:\; x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \right\}$, dimostrare che $\sup B = 1$, $\inf B = 0$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi.

- $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \geq 0$ per ogni $x \geq 1$, oltretutto $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} = 0$ per $x = 1$, quindi 0 è il minimo.
- $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} < 1$ per ogni $x \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $1 > \varepsilon > 0$, la disequazione $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \geq 1-\varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $x \geq \dfrac{1+\sqrt{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}}{2\varepsilon-\varepsilon^2}$ (per $\varepsilon \geq 1$ la disequazione è sempre vera per il punto 1).

Esercizio 3.

1. Abbiamo che $\frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}$, da cui si osserva che la successione cresce al crescere di n, quindi si intuisce che il sup è 1 ed il minimo è 0, mostriamolo:
   - $\dfrac{n-1}{n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, e $\dfrac{n-1}{n} = 0$ quando è $n = 1$, quindi 0 è il minimo.
   - $\dfrac{n-1}{n} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non il massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\dfrac{n-1}{n} \geq 1-\varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.
2. Mostriamo che l'inf è -1 ed il sup 1:
   - $\dfrac{2n}{n^2+1} \geq -1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\dfrac{2n}{n^2+1} = -1$ quando è $n = -1$, quindi -1 è il minimo.
   - $\dfrac{2n}{n^2+1} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\dfrac{2n}{n^2+1} = 1$ quando è $n = 1$, quindi 1 è il massimo.
3. Possiamo studiare l'insieme separatamente sui numeri pari e sui numeri dispari. Per n pari si ha $\frac{2n-1}{n} = 2-\frac{1}{n}$, da cui si osserva che la successione cresce al crescere di n, quindi ha come sup 2, mostriamolo:
   - $2-\frac{1}{n} < 2$ per ogni $n \geq 1$, quindi 2 è un maggiorante. Preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\dfrac{2n-1}{n} \geq 2-\varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

   Per n dispari si ha $-1\left(\frac{2n-1}{n}\right) = -2+\frac{1}{n}$, da cui si osserva che la successione decresce al crescere di n, quindi si intuisce che l'inf è -2, mostriamolo:
   - $-2+\frac{1}{n} > -2$ per ogni $n \geq 1$, quindi -2 è un minorante. Preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $-\dfrac{2n-1}{n} \leq -2+\varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Dato che per ogni n si ha che $-2+\frac{1}{n}<2-\frac{1}{n}$ il sup sarà 2 mentre l'inf -2.

4. Mostriamo che l'estremo inferiore è 0, mentre quello superiore è $\frac{4}{e^2}$:
   - $n^2e^{-n}\geq 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, inoltre per $\varepsilon>0$ fissato, esiste sempre un n tale che $n^2e^{-n}\leq\varepsilon$ (questa affermazione potrà essere giustificata rigorosamente da questa settimana con i limiti, dicendo che tale n esiste poiché $\lim_{n\to\infty} n^2e^{-n}=0$).
   - Che $n^2e^{-n}\leq\frac{4}{e^2}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, si può dimostrare per induzione. Tale valore è il massimo perché è assunto per $n=2$.
5. Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2+2}\leq x+3$ sono $x\in\left[-\dfrac{7}{6};\infty\right)$, quindi il minimo dell'insieme è $-\dfrac{7}{6}$ e l'insieme è illimitato superiormente.
6. Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}>0$ sono $x\in(-\infty;3)\cup(-1;2)$, quindi l'insieme è illimitato inferiormente e 2 è il sup ma non il massimo dell'insieme.
7. Le soluzioni della disequazione $|x-5x^2+3|\leq 2x$ sono $x\in\left(\dfrac{\sqrt{61}-1}{10};\dfrac{\sqrt{69}+3}{10}\right)$, estremi non compresi dato che $x\in\mathbb{Q}$, quindi l'inf dell'insieme è $\dfrac{\sqrt{61}-1}{10}$ e il sup dell'insieme è $\dfrac{\sqrt{69}+3}{10}$.
8. Le soluzioni della disequazione $\log(1+e^x)\leq 2x$ sono $x\in\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);+\infty\right)$, quindi l'inf è $\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e l'insieme non è limitato superiormente.
9. Per la regolarità di seno e coseno possiamo distinguere i seguenti casi:
   - Se $x\in[6k\,,\,6k+1)$ con $k\in\mathbb{Z}$ allora $[x]=6k$ quindi $\sin\left(\dfrac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi[x]}{3}\right)=\sin(4k\pi)\cos(2k\pi)=0$,
   - Se $x\in[6k+1\,,\,6k+2)$ con $k\in\mathbb{Z}$ allora $[x]=6k+1$ quindi $\sin\left(\dfrac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi[x]}{3}\right)=\sin(4k\pi+\dfrac{2\pi}{3})\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,
   - Se $x\in[6k+2\,,\,6k+3)$ con $k\in\mathbb{Z}$ allora $[x]=6k+2$ quindi $\sin\left(\dfrac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi[x]}{3}\right)=\sin(4k\pi+\dfrac{4\pi}{3})\cos(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,
   - Se $x\in[6k+3\,,\,6k+4)$ con $k\in\mathbb{Z}$ allora $[x]=6k+3$ quindi $\sin\left(\dfrac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi[x]}{3}\right)=\sin(4k\pi+2\pi)\cos(2k\pi+\pi)=0$,

- Se $x \in [6k+4\,,\,6k+5)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 6k+4$ quindi $\sin\left(\frac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi[x]}{3}\right) = \sin(4k\pi + \frac{8\pi}{3})\cos(2k\pi + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$,

- Se $x \in [6k+5\,,\,6k+6)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 6k+5$ quindi $\sin\left(\frac{2\pi[x]}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi[x]}{3}\right) = \sin(4k\pi + \frac{10\pi}{3})\cos(2k\pi + \frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Quindi l'insieme ha come massimo $\frac{\sqrt{3}}{4}$ mentre come minimo $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

10. Per la regolarità della funzione parte frazionaria possiamo distinguere i seguenti casi:

    - Se $x \in [7k\,,\,7k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \{2k\} = 0$,

    - Se $x \in [7k+1\,,\,7k+2)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+1$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + \frac{2}{7}\right\} = \frac{2}{7}$,

    - Se $x \in [7k+2\,,\,7k+3)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+2$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + \frac{4}{7}\right\} = \frac{4}{7}$,

    - Se $x \in [7k+3\,,\,7k+4)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+3$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + \frac{6}{7}\right\} = \frac{6}{7}$,

    - Se $x \in [7k+4\,,\,7k+5)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+4$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + 1 + \frac{1}{7}\right\} = \frac{1}{7}$,

    - Se $x \in [7k+5\,,\,7k+6)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+5$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + 1 + \frac{3}{7}\right\} = \frac{3}{7}$,

    - Se $x \in [7k+6\,,\,7k+7)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = 7k+6$ quindi $\left\{\frac{2[x]}{7}\right\} = \left\{2k + 1 + \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$.

    Quindi l'insieme ha come massimo $\frac{6}{7}$ mentre come minimo 0.

11. Come nel punto 10 possiamo distinguere i seguenti casi:

    - Se $|x| = 6$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|)\left\{\frac{5[x]}{6}\right\} = 0$

    - Se $|x| < 6$ e $x \in [6k\,,\,6k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|)\left\{\frac{5[x]}{6}\right\} = \{5k\} = 0$,

- Se $|x| < 6$ e $x \in [6k{+}1\,,\, 6k{+}2)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|) \left\{ \dfrac{5[x]}{6} \right\} =$
$= \left\{ 5k + \dfrac{5}{6} \right\} = \dfrac{5}{6}$,

- Se $|x| < 6$ e $x \in [6k{+}2\,,\, 6k{+}3)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|) \left\{ \dfrac{5[x]}{6} \right\} =$
$= \left\{ 5k + 1 + \dfrac{2}{3} \right\} = \dfrac{2}{3}$,

- Se $|x| < 6$ e $x \in [6k{+}3\,,\, 6k{+}4)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|) \left\{ \dfrac{5[x]}{6} \right\} =$
$= \left\{ 5k + 2 + \dfrac{1}{2} \right\} = \dfrac{1}{2}$,

- Se $|x| < 6$ e $x \in [6k{+}4\,,\, 6k{+}5)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|) \left\{ \dfrac{5[x]}{6} \right\} =$
$= \left\{ 5k + 3 + \dfrac{1}{3} \right\} = \dfrac{1}{3}$,

- Se $|x| < 6$ e $x \in [6k{+}5\,,\, 6k{+}6)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\operatorname{sgn}(6 - |x|) \left\{ \dfrac{5[x]}{6} \right\} =$
$= \left\{ 5k + 4 + \dfrac{1}{6} \right\} = \dfrac{1}{6}$.

Se $|x| > 6$ si ottengono gli stessi risultati ma negativi quindi in definitiva l'insieme è $\left\{ -\dfrac{5}{6}\,, -\dfrac{2}{3}\,, -\dfrac{1}{2}\,, -\dfrac{1}{3}\,, -\dfrac{1}{6}\,, 0\,, \dfrac{1}{6}\,, \dfrac{1}{3}\,, \dfrac{1}{2}\,, \dfrac{2}{3}\,, \dfrac{5}{6} \right\}$ che ha come massimo $\frac{5}{6}$ e come minimo $-\frac{5}{6}$.

12. Distinguiamo i seguenti casi:

- Se $n = 8k$, $n = 8k + 2$, $n = 8k + 4$ o $n = 8k + 6$ si ha che $\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2)) = \operatorname{sgn}(0) = 0$, e quindi $\left(\sin\left(\dfrac{\pi n}{4} \right) \right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} = 1$,

- Se $n = 8k{+}1$ allora $\left(\sin\left(\dfrac{\pi n}{4} \right) \right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} = \left(\sin\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \right) \right)^{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)} =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

- Se $n = 8k{+}3$ allora $\left(\sin\left(\dfrac{\pi n}{4} \right) \right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} = \left(\sin\left(2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \right) \right)^{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right)} =$
$= \sqrt{2}$,

- Se $n = 8k{+}5$ allora $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} = \left(\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{2}\right)\right)} =$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- Se $n = 8k{+}7$ allora $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^{\operatorname{sgn}(\sin(\pi n/2))} = \left(\sin\left(2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2k\pi+\frac{7\pi}{2}\right)\right)} =$
$= -\sqrt{2}$.

Quindi il massimo è $\sqrt{2}$ e il minimo è $-\sqrt{2}$.

Esercizio 4. Dimostriamo separatamente le disuguaglianze $\sup A - \inf A \geq \operatorname{diam} A$ e $\sup A - \inf A \leq \operatorname{diam} A$.

Per definizione abbiamo $\inf A \leq x, y \leq \sup A$ per ogni $x, y \in A$ quindi:

$$|x - y| \leq \sup A - \inf A \quad \forall\, x, y \in A.$$

Quindi $\sup A - \inf A$ è un maggiorante dell'insieme $\{|x - y| \, : \, x, y \in A\}$. Dato che l'estremo superiore è il minimo dei maggioranti allora:

$$\sup A - \inf A \geq \sup\{|x - y| \, : \, x, y \in A\} =: \operatorname{diam} A.$$

Vediamo adesso la disuguaglianza opposta. Supponiamo per assurdo che $\sup A - \inf A > \operatorname{diam} A$. Quindi $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che:

$$\operatorname{diam} A < \sup A - \inf A - 2\varepsilon < (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon)$$

Per definizione di estremo superiore e inferiore abbiamo che $\exists\, \bar{x} \in A$ e $\exists\, \bar{y} \in A$ tali che $\sup A - \varepsilon < \bar{x}$ e $\inf A + \varepsilon > \bar{y}$, sostituendo:

$$\operatorname{diam} A < \sup A - \inf A - 2\varepsilon < (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon) < \bar{x} - \bar{y} \leq |\bar{x} - \bar{y}| \leq \operatorname{diam} A$$

che è assurdo. Quindi deve essere vero che $\sup A - \inf A \leq \operatorname{diam} A$.

Esercizio 5. 1. Dimostriamo: Sia $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Poniamo $a_n := \inf E_n$ e $b_n := \sup E_n$.

Poiché $E_n \subseteq A$, si ha $\inf A \leq a_n$ per ogni n, quindi

$$\inf A \leq \inf_n a_n.$$

D'altra parte, preso $x \in A$, esiste k tale che $x \in E_k$, quindi $a_k \leq x$. Segue $\inf_n a_n \leq a_k \leq x$ per ogni $x \in A$, e dunque

$$\inf_n a_n \leq \inf A.$$

Combinando le due disuguaglianze si ottiene

$$\boxed{\inf A = \inf_n \inf E_n.}$$

In modo analogo, poiché $E_n \subseteq A$ implica $b_n \le \sup A$, otteniamo

$$\sup_n b_n \le \sup A.$$

Viceversa, per ogni $x \in A$ esiste k con $x \in E_k$, quindi $x \le b_k \le \sup_n b_n$, il che implica

$$\sup A \le \sup_n b_n.$$

Pertanto

$$\boxed{\sup A = \sup_n \sup E_n.}$$

Le due uguaglianze valgono sempre, purché gli insiemi E_n siano non vuoti e limitati.

2. Confutiamo:

   Sia ora $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$. Poniamo ancora $a_n := \inf E_n$, $b_n := \sup E_n$.

   Poiché $A \subseteq E_n$ per ogni n, si ha:

   $$\inf A \ge a_n \quad \text{e} \quad \sup A \le b_n.$$

   Quindi

   $$\inf A \ge \sup_n a_n, \qquad \sup A \le \inf_n b_n.$$

   Tuttavia, in generale le uguaglianze

   $$\inf A = \sup_n a_n, \qquad \sup A = \inf_n b_n$$

   non valgono sempre.

   Controesempio per la prima uguaglianza:

   $$E_n = (0, 1/n) \cup \{1\}.$$

   Si ha $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ e

   $$A = \bigcap_n E_n = \{1\}.$$

   Allora $\inf A = 1$, ma $\inf E_n = 0$ per ogni n, dunque $\sup_n \inf E_n = 0 \neq 1$.

   Controesempio per la seconda uguaglianza:

   $$E_n = (1 - 1/n, 1) \cup \{0\}.$$

   Ancora $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ e

   $$A = \{0\},$$

   quindi $\sup A = 0$, mentre $\sup E_n = 1$ per ogni n, e quindi $\inf_n \sup E_n = 1 \neq 0$.

Conclusione. Nel caso decrescente valgono solo le disuguaglianze

$$\boxed{\inf A \geq \sup_n \inf E_n, \qquad \sup A \leq \inf_n \sup E_n,}$$

e le uguaglianze diventano vere soltanto se i limiti $\sup_n \inf E_n$ e $\inf_n \sup E_n$ appartengono effettivamente all'intersezione A.