Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 4

Esercizio 1.

1. $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2+2-\sqrt{n^3-2}}{n^2+6}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{2}{n^3}}}{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}} =$

   $= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{2}{n^3}}\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}} = e^1 = e$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^5+1} = \lim_{n\to\infty} e^{\log\left(\sqrt[n]{2n^5+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)}$, ora notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(2n^5+1) = 0$ poiché il logaritmo di un polinomio $p(x)$ cresce più lentamente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, quindi $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)} = e^0 = 1$

3. $\lim_{n\to\infty} \left[n\log(n-1) - (n-e^{-n})\log n\right] =$

   $= \lim_{n\to\infty} \log(n-1)^n - n\log n + e^{-n}\log n = \lim_{n\to\infty} \log(n-1)^n - \log n^n + \frac{\log n}{e^n} =$

   $= \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \frac{\log n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + \frac{\log n}{e^n} = \log(e^{-1}) =$
   $= -1$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}-\cos n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2}$, ora notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} = \infty$

poiché l'esponenziale di un polinomio $p(x)$ cresce più velocemente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, oltretutto notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$ poiché $\cos n$ è una quantità che oscilla tra -1 e 1 (e quindi è limitata) mentre $n^2 \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2} = \infty - 0 = \infty$

5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n \overset{m=n+2}{=} \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-2} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right)^{-2} = e \cdot 1 = e$

6. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{n^2}\right)^{n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}n^2 \log n} =$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \frac{\log n}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^{\frac{\log n}{2n}} = e^0 = 1$

7. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n \frac{1}{\log n}} = e$

8. $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{5}{n}} \sqrt[n]{2^n+5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+(\frac{2}{5})^n}}{(\sqrt[n]{n})^5} = 5$

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-7)^n + n^{n-2}}{4n^n - 5n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n(1-\frac{7}{n})^n + \frac{n^n}{n^2}}{n^n(4-5\frac{n!}{n^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{7}{n})^n + \frac{1}{n^2}}{4-5\frac{n!}{n^n}} = \frac{e^{-7}+0}{4-0} = \frac{e^{-7}}{4}$

10. $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2^n)^{\frac{1}{n}}}{(n+e^{-n})\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(\frac{n^2}{2^n}+1)^{\frac{1}{n}}}{n(1+\frac{e^{-n}}{n})\log n} = \frac{2}{\infty} = 0$

11. $\lim_{n\to\infty} n! \sin\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \frac{2n^2+3n-5}{n+9} =$

$$= \lim_{n\to\infty} n! \frac{1}{(n+1)!} \frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)}{\frac{1}{(n+1)!}} \cdot \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{9}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot 2n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

12. $\lim_{n\to\infty} 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{n+1-\sqrt{n^2+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{\frac{(n+1)^2-(n^2+1)}{n+1+\sqrt{n^2+1}}} - 1) = \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{\frac{2n}{n(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}} - 1) = \infty \cdot 8 = \infty$

13. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3\cdot 1 = 3$

14. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+2\log(n)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log n\sqrt{(1+\frac{2}{\log n})}}}{n^2+1} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log n \log 2}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2-\log 2}} = \frac{1}{\infty} = 0$

15. $\lim_{n\to\infty} \frac{10^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\sqrt{(\log n)^2+2\log(n)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\log n\sqrt{(1+\frac{2}{\log n})}}}{n^2+1} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log n \log 10}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} n^{\log 10 - 2} = \infty$

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{1-\cos(n^{-2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{(n^4+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

17. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n\right)^2 = \left(e^{-1}\right)^2 =$
$= e^{-2}$

Esercizio 2. 1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x = -\infty$. Mostriamolo con la definizione: dato $M<0$, cerchiamo x_0 tale che per ogni $x > x_0$ valga $\sqrt{x}-x < M$, chiamando $t=\sqrt{x}$, dobbiamo risolvere $t-t^2 < M$, che ha come soluzione (ricordando che $t>0$)

$$t > \frac{1-\sqrt{1-4M}}{2}$$

per tanto basta scegliere $x_0 = (\frac{1-\sqrt{1-4M}}{2})^2$ ed abbiamo verificato la definizione di limite.

2. $\lim_{x\to 3} e^{\frac{2}{3-x}}$ non esiste, infatti i limiti destro e sinistro sono diversi:

se $x\to 3^-$ allora $\frac{2}{3-x} \to +\infty$, quindi

$$\lim_{x\to 3^-} e^{\frac{2}{3-x}} = +\infty.$$

Se $x\to 3^+$ allora$\frac{2}{3-x} \to -\infty$, quindi

$$\lim_{x\to 3^+} e^{\frac{2}{3-x}} = 0.$$

3. $\lim_{x\to 3} e^{\frac{2}{|3-x|}} = +\infty$.

Verifichiamo con la definizione: dato $M > 0$ scegliamo $\delta > 0$ tale che per $0 < |x-3| < \delta$ si abbia $e^{\frac{2}{|3-x|}} > M$, che è equivalente a $|x-3| < \dfrac{2}{\log M}$, quindi basta scegliere $\delta = \dfrac{2}{\log M}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x+1| - |1-x| = -2.$

   Qui basta scegliere $x_0 = -1$, in questo modo per ogni $x < x_0$ abbiamo che $||x+1| - |1-x| - 2| = 0$ e quindi è minore di ϵ per ogni $\epsilon > 0$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \sin(x)$ non esiste; infatti consideriamo le due successioni

$$x_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(x_n) = 1,$$
$$y_n = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(y_n) = -1.$$

   Per $n \to \infty$ abbiamo $x_n, y_n \to \infty$; ma

$$e^{x_n}\sin(x_n) = e^{x_n} \to +\infty, \qquad e^{y_n}\sin(y_n) = -e^{y_n} \to -\infty.$$

   Quindi per il teorema ponte la funzione non ammette limite.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1)^{1/3} - x^{1/3} = 0.$

   Verifichiamo con la definizione: dato $\varepsilon > 0$ scegliamo $x_0 > 0$ tale che, per $x > x_0$, $|(x+1)^{1/3} - x^{1/3}| < \varepsilon$, osservando che i moduli sono superflui perché la quantità è positiva e razionalizzando, abbiamo che la disuguaglianza precedente è equivalente a

$$(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

   quindi basta scegliere x_0 tale che $(x_0+1)^{2/3} + (x_0+1)^{1/3}x_0^{1/3} + x_0^{2/3} > \frac{1}{\varepsilon}$. (che esiste perché la quantità di sinistra cresce a $+\infty$)

7. $\lim\limits_{x\to 1} \{x\}$ non esiste.

   Visto che

$$\lim_{x\to 1^-} \{x\} = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} \{x\} = 0,$$

8. $\lim\limits_{x\to 1} [x]$ non esiste. Se $0 < x < 1$, allora $[x] = 0$, perciò $\lim_{x\to 1^-} [x] = 0$. Mentre $\lim_{x\to 1^+} [x] = 1$. I limiti laterali sono diversi, dunque il limite totale non esiste.

9. $\lim\limits_{x\to\pi} [x] + x = 3 + \pi.$

   Dal momento che $4 > \pi > 3$, esiste un intorno di π (ad esempio l'intervallo $(3,4)$) in cui per ogni x si ha $[x] = 3$. Quindi per x sufficientemente vicino a π,

$$[x] + x = 3 + x,$$

Dunque dato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\delta = \min\{\pi - 3,\ 4 - \pi,\ \varepsilon\}$ per $0 < |x - \pi| < \delta$ si ha $[x] = 3$ e quindi

$$\big|([x] + x) - (3 + \pi)\big| = |x - \pi| < \varepsilon,$$

verificando la definizione di limite.