

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 5

Esercizio 1.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} \right) = 2$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{2x+4} - 1}{x + 2} \stackrel{y=x+2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{2y} = 2 \cdot 1 = 2$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{2x} \cdot \frac{2x}{\frac{3x \sin(3x)}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{1 - e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{9x^2} 9x^2 \frac{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}{1 - e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}} \frac{2}{\ln(1-x^2)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 9x^2 \cdot (-1) \cdot \frac{2}{\ln(1-x^2)} = -9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} = -9 \cdot 1 = -9$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-4x)}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-4x)}{-4x} = -4$
6. Qui basta usare le proprietà dei logaritmi per riscrivere il numeratore e poi il limite notevole:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log((\alpha + x)^2) - \log(\alpha^2) \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + \frac{x}{\alpha})}{x} = \frac{2}{\alpha}$$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(3+3x) - \log(3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(3(1+x)) - \log(3)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(3) + \log(1+x) - \log(3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(1+x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(1+x)} \frac{x}{2x} =$
 $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{x}{\log(1+x)} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sin x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\sin x}{x} x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x \ln x}$ e ricordando che per le gerarchie di infinitesimi abbiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ possiamo scrivere $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x \ln x} = e^0 = 1$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x^3}})^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\sin x}{x^3} (\frac{1}{e^{\frac{1}{x^3}}} + 1)^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2} \cdot 1} = +\infty$
11. Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x = 0$ quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x)}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}} - 1} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x)}{e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{x} = y$
 $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y} - \frac{\ln(\frac{1}{y})}{y}}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-y^2} - 1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y^2 \ln(1+\frac{1}{y})} - 1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y \frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{\frac{1}{y}}} - 1} =$
 $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y} - 1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(\frac{x^2 + \ln|x|}{x^2} \right)^{\frac{1}{\ln|x|}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(1 + \frac{\ln|x|}{x^2} \right)^{\frac{1}{\ln|x|}} - 1 \right] =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(1 + \frac{\ln|x|}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{x^2}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[e^{\frac{1}{x^2} \frac{\left(1 + \frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{\ln|x|}} \cdot \frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}} - 1 \right] =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[e^{\frac{1}{x^2} - 1} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[1 \cdot \frac{1}{x^2} \right] =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
13. $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{x+\pi}))}{(x+\pi)^{-\frac{1}{x+\pi}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{t}))}{(t)^{-\frac{1}{t}}}$, facendo la sostituzione $t = x + \pi$. Ora $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{t}))}{(t)^{-\frac{1}{t}}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{(\frac{1}{z})^{-z}}$ facendo una seconda sostituzione $z = \frac{1}{t}$. $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{(\frac{1}{z})^{-z}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{e^z - e^{-z}}{2})}{z^z} = 0$ poichè

il seno è una funzione che oscilla mentre z^z è una funzione che cresce all'infinito (al solito stiamo usando il Teorema del confronto).

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cos x - x}{2 \tan(\frac{1}{x}) + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6 \cos x}{x} - 1}{\frac{2 \tan(\frac{1}{x})}{x} + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log(e + x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \log(1 + \frac{x}{e}))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(1 + \log(1 + \frac{x}{e}))}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(1 + \frac{x}{e})}{x}} = e^{\frac{1}{e}}$$

16. Poniamo $y = \log x$, otteniamo

$$\begin{aligned} (\log \log x)^{\log x} - x(\log x)^{\log \log x} &= (\log y)^y - e^y y^{\log y} = e^{y \log \log y} - e^y e^{(\log y)^2} = \\ &= e^{y \log \log y} (1 - e^{y + (\log y)^2 - y \log \log y}) = e^{y \log \log y} (1 - e^{y(1 + \frac{(\log y)^2}{y} - \log \log y)}) = +\infty \cdot (1 - e^{-\infty}) = +\infty \end{aligned}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{\cos(x - \frac{\pi}{2})}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log(1 - x)}{\sin x}} = \frac{1}{e}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\log(1 + \sin^4 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan(x) + (1 - \cos 2x) \sin^{21} x}{27x^{45} + 5 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \arctan x}{x} + \frac{(1 - \cos 2x) \sin^{21} x}{x}}{27x^{44} + 5 \frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x) \tan 3x}{(\sin x - x^3)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{25x^2}{2} \cdot 3x}{x^3 (\frac{\sin x}{x} - x^2)^3} = \frac{75}{2}$$

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi \cos x - \pi)}{x^2 \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(\pi(1 - \cos x))}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(\pi(1 - \cos x))}{\pi(1 - \cos x)} \frac{\pi(1 - \cos x)}{x^2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} x e^x \sin\left(e^{-x} \sin \frac{2}{x}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(e^{-x} \sin \frac{2}{x}\right) \sin \frac{2}{x}}{e^{-x} \sin \frac{2}{x} \frac{2}{x}} = 2$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (e^{\cos x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cos x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log_{13}(x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} 13^{\frac{\log_{13} \sin x^2}{\log_{13} x^2}} = 13 \text{ (dove abbiamo usato che } \sin x^2 \sim x^2 \text{ per } x \rightarrow 0, \text{ se volete convincervi di più potete anche moltiplicare e dividere per } x^2 \text{ dentro l'argomento del logaritmo e usare la proprietà dei logaritmi e poi i limiti notevoli).}$$

25. Discutiamo prima la base:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log(x) \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\log(x)} \right) \right) + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log^2(x)}{\log(x)} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\log(x)} \right) \right) + 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2 \log(x)} + 1 \right).$$

Mentre l'esponente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x^4) \left(\sqrt[5]{x^6 + x^5} - \sin \left(420x^5 - \frac{\pi^3}{7}x \right) \right)}{\log_{23}(175)x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(x) \left(\sqrt[5]{x^6 + x^5} - \sin \left(420x^5 - \frac{\pi^3}{7}x \right) \frac{420x^5 - \frac{\pi^3}{7}x}{420x^5 - \frac{\pi^3}{7}x} \right)}{x (\log_{23}(175)x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(x) \left(\sqrt[5]{x^6 + x^5} - 420x^5 + \frac{\pi^3}{7}x \right)}{x (\log_{23}(175)x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(x)x \left(\sqrt[5]{x^5 + 1} - 420x^4 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{x (\log_{23}(175)x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(x) \left(\sqrt[5]{x^5 + 1} - 420x^4 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{(\log_{23}(175)x + 1)}.$$

In definitiva:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2 \log(x)} + 1 \right)^{\frac{4 \log(x) \left(\sqrt[5]{x^5 + 1} - 420x^4 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{(\log_{23}(175)x + 1)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{1}{2 \log(x)} + 1 \right)^{2 \log(x)} \right)^{\frac{2 \left(\sqrt[5]{x^5 + 1} - 420x^4 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{(\log_{23}(175)x + 1)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2 \left(\sqrt[5]{x^5 + 1} - 420x^4 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{(\log_{23}(175)x + 1)}} = e^{\frac{2 \left(\sqrt[5]{0+1} - 0 + \frac{\pi^3}{7} \right)}{(0+1)}} = e^{2 + \frac{2\pi^3}{7}}$$

Esercizio 2. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + 1) - 2 \log n}{\log(n^5 + 3) - 5 \log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\log(1 + \frac{3}{n^5})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\log(1 + \frac{3}{n^5})}.$

$$\frac{\frac{3}{n^5} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{3}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1 + \frac{3}{n^5})} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1 + \frac{3}{n^5})} \cdot \frac{n^3}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \infty = \infty$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-5n}}{\log(1 + \sqrt{3}e^{-5n})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}e^{-5n}}{\log(1 + \sqrt{3}e^{-5n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(\sqrt[n]{7^n + 5^n} - 7 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(7 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n} - 7 \right) = \\ &= 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(\sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n} - 1 \right) = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(e^{\log \sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n}} - 1 \right) = \\ &= 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(e^{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)} - 1 \right) = \\ &= 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n \left(e^{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)}{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)} = \\ &= 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)} - 1}{\frac{1}{n} \log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)} \cdot \frac{\log(1 + \left(\frac{5}{7} \right)^n)}{\left(\frac{5}{7} \right)^n} \cdot \frac{n}{n} = 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n \arctan(3e^n)) \left(\log(1 + \frac{1}{n}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \arctan(3e^n)) \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) \cdot 1 = 1 - \frac{\pi}{2}$$

5. Dal momento che per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, vale $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, invertendo tale relazione e applicandola con $\theta = \arctan(x)$, si ottiene

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

per ogni $x > 0$, ciò ci permette di riscrivere il limite come segue e applicare il limite notevole dell'arcotangente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\arctan(n) - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = -1$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\sqrt{n}} - 2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\left(\frac{n}{2^{\sqrt{n}}} \right)^{\sqrt{n}} - 1 \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} 7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (2e^{\frac{\ln n}{n}} - 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 (e^{\frac{\ln n}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \cdot \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{\frac{\ln n}{n}} \cdot \frac{\ln n}{n} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 1 \cdot \ln n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n = \infty \end{aligned}$$

8. Sfruttiamo la formula del cambio di base per i logaritmi: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{1+\frac{1}{n}}(5) - \log_{1-\frac{1}{n}}(5)}{2 \log 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log 5}{\log(1+\frac{1}{n})} - \frac{\log(5)}{\log(1-\frac{1}{n})}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \log 5}{n} = \\
9. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\frac{1}{n^5})}{2 \log(n^6 + n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^{-5})}{2 \log[n^6(1 + n^{-4})]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 \log n}{2 \log(n^6) + 2 \log(1 + n^{-4})} = \\
& -\frac{5}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{6 \log n + \log(1 + n^{-4})} = -\frac{5}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log n \left(6 + \frac{\log(1+n^{-4})}{\log n}\right)} = \\
& -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (6 + \frac{0}{\infty})} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{12} \\
10. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log(1 - \sin(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - \frac{\log(1-\sin(\frac{1}{n}))}{-\sin(\frac{1}{n})} (-\sin(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))} = 1 \\
11. & \text{Spezziamo il limite in maniera da usare il limite notevole della tangente iperbolica e razionalizziamo al denominatore dentro il logaritmo, per poi usare} \\
& \text{il limite notevole anche su quest'ultimo: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^n \frac{\tanh(\frac{1}{n^n})}{n \log(\sqrt{n^2+1} - n + 1)} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tanh(\frac{1}{n^n})}{\frac{1}{n^n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n} = \\
& 2 \\
12. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(ne^{-2n}) + n\sqrt{10-10\cos(e^{-2n})}}{\sin((2n+1)e^{-2n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ne^{-2n})\frac{\tan(ne^{-2n})}{(ne^{-2n})} + n\sqrt{10}\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{((2n+1)e^{-2n})\frac{\sin((2n+1)e^{-2n})}{((2n+1)e^{-2n})}} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-2n} + n\sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}\frac{\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}}}{(2n+1)e^{-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-2n}[1 + \sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}]}{ne^{-2n}(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + 0} = \\
& \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
13. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 (\log(\sqrt[n]{n+1}) - \log(\sqrt[n]{n-1}))}{n \sin(e^{\frac{1}{4n}} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 \left(\log\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)\right)}{n \sin\left(\left(e^{\frac{1}{4n}} - 1\right)^{\frac{1}{\frac{1}{4n}}}\right)} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 \left(\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)}{n \sin\left(\frac{1}{4n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \left(\log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right)}{n \sin\left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{4n}}}} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \left(\frac{\frac{2}{n-1}}{\frac{2}{n-1}} \log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right)}{n \left(\frac{1}{4n}\right)} =
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \left(\frac{2}{n-1} \right)}{\frac{1}{4}} = 16$$

14. Discutiamo prima la base:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(\frac{n! + 1}{n!} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{\frac{1}{n!}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)$$

Mentre l'esponente:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n! + 1}}{\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} - \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2}} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n! + 1}}{\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} - \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2}} \cdot \frac{\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} + \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2}}{\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} + \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2}} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n! + 1} \left(\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} + \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2} \right)}{(n!)^3 + 3n! + 4 - (n!)^3 - 2n! - 2} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n!}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{(n!)^2} + \frac{4}{(n!)^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{(n!)^2} + \frac{2}{(n!)^3}} \right)}{n! \left(1 + \frac{2}{n!} \right)} \sim 2(n!). \end{aligned}$$

Quindi in definitiva:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^{2(n!)} = e^2 \\ 15. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi n^3 + n}{n^2 + 2n^3} \right) (2n + 1)}{\log^n \left(e + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi n^3 + n}{n^2 + 2n^3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) (2n + 1)}{\log^n \left(e \left(1 + \frac{1}{en} \right) \right)} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left(\frac{\pi n^3 + n}{n^2 + 2n^3} - \frac{\pi}{2} \right) (2n + 1)}{\left(\log(e) + \log \left(1 + \frac{1}{en} \right) \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left(\frac{2\pi n^3 + 2n - \pi n^2 - 2\pi n^3}{2(n^2 + 2n^3)} \right) (2n + 1)}{\left(1 + \frac{\frac{1}{en} \log \left(1 + \frac{1}{en} \right)}{\frac{1}{en}} \right)^n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin\left(\frac{2n - \pi n^2}{2(n^2 + 2n^3)}\right)(2n + 1)}{\left(1 + \frac{1}{en}\right)^{ne^{\frac{1}{e}}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin\left(\frac{-\pi + \frac{2}{n}}{2(2n+1)}\right)(2n + 1)}{e^{\frac{1}{e}}} = \\
-e^{-\frac{1}{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{-\pi + \frac{2}{n}}{2(2n+1)}\right)(2n + 1) &= \\
-e^{-\frac{1}{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{-\pi + \frac{2}{n}}{2(2n+1)}\right) \frac{2(2n+1)}{-\pi + \frac{2}{n}} \cdot \frac{-\pi + \frac{2}{n}}{2} &= \\
-e^{-\frac{1}{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\pi + \frac{2}{n}}{2} &= -e^{-\frac{1}{e}} \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt[e]{e}}
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Se $\alpha = 0$ la successione è costantemente nulla, pertanto il suo limite è 0. Se $\alpha \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha \log \frac{n+1}{n}} - 1}{\alpha \log \frac{n+1}{n}} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Quindi abbiamo che per ogni α reale tale limite vale α .

Esercizio 4. Per ciascun punto consideriamo la funzione f ottenuta spostando tutto a sinistra e applichiamo il Teorema di Esistenza degli Zeri, sfruttando la continuità delle funzioni elementari coinvolte.

1. Sia

$$f(x) = x^2 - x - \frac{1}{x}, \quad x \in (1, 5).$$

La funzione f è continua in $(1, 5)$. Calcoliamo i valori agli estremi:

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1, \quad f(5) = 25 - 5 - \frac{1}{5} = 20 - \frac{1}{5} = 19.8 > 0.$$

Poiché $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, per il Teorema di Esistenza degli Zeri esiste $c \in (1, 5)$ tale che $f(c) = 0$, cioè l'equazione ha almeno una soluzione in $(1, 5)$.

2. Sia

$$f(x) = \log(x) + x^3, \quad x \in (0, +\infty).$$

La funzione è continua su $(0, +\infty)$. Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$f(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0.$$

Quindi esistono $a > 0$ piccoli con $f(a) < 0$ e $f(1) > 0$; applicando il Teorema di Esistenza degli Zeri troviamo $c \in (a, 1) \subset (0, +\infty)$ con $f(c) = 0$. Pertanto l'equazione $\log(x) = -x^3$ ammette una soluzione in $(0, +\infty)$ (in particolare in $(0, 1)$).

3. Sia

$$f(x) = x^2 - 1 - e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione f è continua su $\mathbb{R}$. Osserviamo che per $x \rightarrow -\infty$ si ha $x^2 \rightarrow +\infty$ mentre $e^x \rightarrow 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo $f(0) = 0^2 - 1 - e^0 = -1 - 1 = -2 < 0$. Dunque esistono valori di x (ad esempio $x = -3$) con $f(x) > 0$ e $f(0) < 0$. Per il Teorema di Esistenza degli Zeri esiste $c \in (-\infty, 0)$ con $f(c) = 0$. Quindi l'equazione $e^x = x^2 - 1$ ha almeno una soluzione reale.

4. Sia

$$f(x) = \tan^2(x) + \arctan(x^2) - 5x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tutte le funzioni coinvolte sono continue sull'intervallo indicato (la tangente è definita e continua su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\arctan$ è continua su $\mathbb{R}$). Notiamo che

$$f(0) = \tan^2(0) + \arctan(0) - 5 \cdot 0 = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Quindi $x = 0$ è una soluzione e pertanto l'equazione ammette almeno una soluzione nell'intervallo dato.

5. Sia

$$f(x) = x^2 + 10 \sin x - 1000, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione è continua su $\mathbb{R}$. Valutiamo:

$$f(0) = 0 + 10 \sin 0 - 1000 = -1000 < 0.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $x^2 \rightarrow +\infty$ e quindi $f(x) \rightarrow +\infty$. In particolare, prendendo ad esempio $x = 32$,

$$f(32) = 32^2 + 10 \sin(32) - 1000 = 1024 + 10 \sin(32) - 1000 \approx 24 + 10 \sin(32),$$

e poiché $|10 \sin(32)| \leq 10$ risulta $f(32) > 0$. Avendo $f(0) < 0$ e $f(32) > 0$, il Teorema di Esistenza degli Zeri garantisce l'esistenza di $c \in (0, 32)$ con $f(c) = 0$. Quindi l'equazione ha almeno una soluzione reale (anche più di una, ma il teorema assicura almeno una).

Esercizio 5. Sia L la lunghezza del sentiero e sia $[7, 19]$ l'intervallo di tempo (espresso in ore). Definiamo le due funzioni continue

$$f(t) : [7, 19] \rightarrow [0, L], \quad g(t) : [7, 19] \rightarrow [0, L],$$

dove $f(t)$ rappresenta la posizione del monaco durante la salita il primo giorno e $g(t)$ la posizione durante la discesa il secondo giorno.

Per costruzione,

$$f(7) = 0, \quad f(19) = L, \quad g(7) = L, \quad g(19) = 0.$$

Consideriamo la funzione

$$h(t) = f(t) - g(t).$$

La funzione h è continua su $[7, 19]$ e soddisfa

$$h(7) = f(7) - g(7) = 0 - L < 0, \quad h(19) = f(19) - g(19) = L - 0 > 0.$$

Per il Teorema di Esistenza degli Zeri, esiste almeno un istante $t^* \in (7, 19)$ tale che

$$h(t^*) = 0,$$

ossia

$$f(t^*) = g(t^*).$$

Ciò significa che esiste un punto del sentiero in cui il monaco passa esattamente alla stessa ora nei due giorni.