Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 6

Esercizio 1.

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-1)(x^2-2)$
   - Dominio: $\mathbb{R}$
   - Simmetrie: Pari
   - Segno: $x^4 - 3x^2 + 2 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$
   - Asintoti: Non ci sono asintoti verticali perché il dominio è tutto $\mathbb{R}$ e non ci sono asintoti orizzontali perchè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, neanche asintoti obliqui perché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = 4x^3 - 6x \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$, quindi i punti critici sono $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ e 0, i primi due sono punti di minimo mentre l'origine è punto di massimo.
   - Derivata seconda: $f''(x) = 12x^2 - 6 \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $f(x) = (3x - x^2)e^{-x}$
   - Dominio: $\mathbb{R}$
   - Segno: $(3x - x^2)e^{-x} \geq 0 \iff (3x - x^2) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 3$
   - Asintoti: Non ci sono asintoti verticali perché il dominio è tutto $\mathbb{R}$, ci sta un asintoto orizzontale a $+\infty$, infatti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, mentre non ci sono asintoti obliqui perchè $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 3) \geq 0 \iff x \leq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x \geq \frac{5+\sqrt{13}}{2}$, quindi i punti critici sono $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ il primo è di massimo mentre il secondo di minimo.

- Derivata seconda: $f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 7x - 8) \geq 0 \iff x \in \left[\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right]$

3. $f(x) = \dfrac{9(x+1)}{(x+2)^3}$
   - Dominio: $x \neq -2$
   - Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \leq -2 \vee x \geq -1$
   - Asintoti verticali: $\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty$
   - Asintoti orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = -\frac{9(2x+1)}{(x+2)^4} \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{2}$, e $-\frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale.
   - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{54x}{(x+2)^5} \geq 0 \iff x \leq -2 \vee x \geq 0$

4. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
   - Dominio: $-2 \leq x \leq 2$
   - Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ dato che la radice è sempre positiva.
   - Simmetrie: $f(x) = -f(-x)$ quindi la funzione è dispari.
   - Asintoti: Non ci sono asintoti verticali perché il dominio è un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua. Non ci sono nemmeno asintoti orizzontali o obliqui dato che la funzione non è definita fuori da $[-2, 2]$.
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ è un minimo mentre $\sqrt{2}$ è un massimo.
   - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)^{3/2}} \geq 0 \iff x \leq 0$

5. $f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{3x+2}$
   - Dominio: $x \neq -\frac{2}{3}$
   - Segno: $f(x) \geq 0 \iff -\frac{2}{3} \leq x \ \vee x \geq 0$
   - Asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\frac{2}{3}^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, non ci sono asintoti obliqui dato che $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{e^{2x}\left(6x^2+4x+2\right)}{(3x+2)^2} \geq 0$ è vera $\forall\ x \in \mathbb{R} \backslash \{-\frac{2}{3}\}$

- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{4e^{2x}\left(9x^3+12x^2+10x+1\right)}{(3x+2)^3}$, per studiare i flessi notiamo che il denominatore è maggiore di zero per $x \geq -\frac{2}{3}$. Mentre il numeratore è il prodotto tra $4e^{2x}$, che è sempre positivo, ed il polinomio $p(x) = 9x^3+12x^2+10x+1$. Notiamo che $p'(x) = 27x^2+24x+10$ che è sempre strettamente maggiore di zero, quindi $p(x)$ è strettamente crescente; inoltre $p(-1) = -6 < 0$ e $p(0) = 1 > 0$ quindi $p(x)$ ha un unico zero $x_0 \in (-1,0)$. In definitiva $f''(x) \geq 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (x_0, +\infty)$.

6. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x-1}$
   - Dominio: $x \neq 1$
   - Segno: $f(x) \geq 0 \iff -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 1$
   - Asintoti verticali: $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$
   - Asintoti obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = 5$, quindi la retta $2x+5$ è un asintoto obliquo della funzione.
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{2(x^2-2x-2)}{(x-1)^2} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$. $1-\sqrt{3}$ è un minimo e $1+\sqrt{3}$ è un massimo.
   - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{12}{(x-1)^3} \geq 0 \iff x > 1$

7. $f(x) = \log^2(|2x|)$
   - Dominio: $x \neq 0$
   - Segno:$f(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$
   - Simmetrie: Pari
   - Asintoti: Non ci sono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$
   - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{2\log(|2x|)}{x} \geq 0 \iff x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, $\pm\frac{1}{2}$ sono entrambi minimi.
   - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\left(1-\log(|2x|)\right)}{x^2} \geq 0 \iff x \in [-\dfrac{e}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{e}{2}]$

8. $f(x) = \log\left(x^3-3x^2+3x\right)$
   - Dominio: $x > 0$

- Segno:$f(x) \geq 0 \iff x \geq 1$
- Asintoti: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Non ci sono asintoti orizzontali o obliqui.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{3(x-1)^2}{x^3 - 3x^2 + 3x} \geq 0$ è vera per ogni x nel dominio.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{3(1-x)(-3+3x-3x^2+x^3)}{x^2(3-3x+x^2)^2}$, con un ragionamento analogo al punto 5 si può vedere che $f''(x) \geq 0 \iff x \in (1, x_0)$ con $x_0 \in (2,3)$.

9. $f(x) = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Segno: $f(x) \geq 0 \iff 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Simmetrie: Dispari
- Asintoti: Non ci sono
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi+2x}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi+2x}{4}\right) \geq 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Derivata seconda: $f''(x) = -\sin(x) \geq 0 \iff -\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. $f(x) = \dfrac{x\log(5x)}{2 - 3\log(x)}$

- Dominio: $x > 0 \land x \neq e^{\frac{2}{3}}$
- Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \in \left[\frac{1}{5}, e^{\frac{2}{3}}\right)$
- Asintoti: $\lim\limits_{x \to e^{\frac{2}{3}\pm}} f(x) = \mp\infty$, non ci sono asintoti orizzontali. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}$ ma $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \dfrac{x}{3}\right] = -\infty$ quindi non ci sono asintoti obliqui.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{2 + 5\log(5x) - 3\log(x)\big(1+\log(5x)\big)}{(2-3\log(x))^2} \geq 0$ usando la sostituzione $t = \log(x)$ si ottiene che la funzione è crescente in $\left[\frac{e^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{28+9\log^2(5)+48\log(5)}}}{\sqrt{5}}, e^{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(e^{\frac{2}{3}}, \frac{e^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{28+9\log^2(5)+48\log(5)}}}{\sqrt{5}}\right]$, il primo è un minimo e il secondo un massimo.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{(2+\log 125)(-8+3\log x)}{x(-2+3\log x)^3} \geq 0 \iff x \in \left(0, e^{\frac{2}{3}}\right) \cup \left[e^{\frac{8}{3}}, +\infty\right)$

11. $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(1-x^2)}$

- Dominio: $x \in (-1, 1)$
- Segno: Sempre negativa
- Simmetrie: Pari
- Asintoti: Non ci sono
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{2x\left[\ln(1-x^2) + \dfrac{x^2}{1-x^2}\right]}{\ln^2(1-x^2)}$.
  Per lo studio dei punti critici notiamo che il denominatore è sempre maggiore di zero, mentre il numeratore è $2xF(x)$ con $F(x) = \left[\ln(1-x^2) + \dfrac{x^2}{1-x^2}\right]$. $2x$ è maggiore di zero quando x è maggiore di zero. Dato che $F'(x) = \dfrac{2x^3}{(1-x^2)^2}$, $F(x)$ risulta decrescente per $x \in (-1, 0)$ e crescente per $x \in (0, 1)$, e poiché $F(0) = 0$ si deduce che $F(x) \geq 0 \; \forall \; x \in (-1, 1)$. Quindi in definitiva $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2(4x^4 + (x^2-1)^2 \log^2(1-x^2) + (5x^2 - 3x^4)\log(1-x^2))}{(1-x^2)^2 \log^3(1-x^2)}$

12. $f(x) = \dfrac{1 - |x^2 - 2|}{|x|}$

- Dominio: $x \neq 0$
- Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$
- Simmetrie: Pari
- Asintoti: $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = -\infty$. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) + x = 0$, quindi la funzione ha un asintoto obliquo lungo la retta $-x$, dalla parità segue che ne ha anche uno lungo x a $-\infty$.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = -\dfrac{x\left(x^4 - 4 + |x^2-2|\right)}{|x|^3\,|x^2-2|} \geq 0 \iff x < -\sqrt{2} \;\vee\; 0 < x < \sqrt{2}$. La derivata non è definita in $\pm\sqrt{2}$ ma dallo studio della monotonia si può dedurre che sono dei massimi.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2x^2(|x^2-2|^3 + 2(x^2-2)^3)}{|x|^5|x^2-2|^3} \geq 0 \iff x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$. Il numeratore si può studiare facendo la sostituzione $y = x^2 - 2$.

13. $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

- Dominio:$\mathbb{R}$
- Segno: Sempre positiva.

- Asintoti: Nessun asintoto verticale. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = -2e^{\frac{2x}{x^2+1}} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \geq 0 \iff x \in [-1,1]$. -1 minimo, 1 massimo.
- Derivata seconda: $f''(x) =$

14. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$
    - Dominio: $\mathbb{R}$
    - Segno: Sempre positiva
    - Simmetrie: Nè pari nè dispari
    - Asintoti: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ dunque abbiamo un asintoto orizzonatale sia a $+\infty$ che a $-\infty$, di conseguenza non ci sono asintoti obliqui. Inoltre non sono presenti asintoti verticali perché il dominio è tutto $\mathbb{R}$.
    - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto la funzione è sempre crescente e non ci sono punti critici.
    - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3} \geq 0 \iff x \leq 0$, pertanto abbiamo un punto di flesso a tangente obliqua per $x = 0$.
15. $f(x) = \tan(x) + \cot(x)$
    - Dominio: $x \neq k\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
    - Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$ con $k \in \mathbb{Z}$ pari.
    - Simmetrie: Dispari
    - Asintoti: Se k è pari $\lim_{x\to\frac{k\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\frac{k\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, viceversa se k è dispari. Dal momento che la funzione è periodica, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ non esiste e pertanto non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, sempre per la periodicità, non esistono asintoti obliqui.
    - Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{-\cos(2x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, i punti con k pari sono di massimo, mentre quelli con k dispari sono di minimo.
    - Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\sin(2x)\sin(x)^2\cos(x)^2 + \cos(2x)^2\sin(2x)}{\sin(x)^4\cos(x)^4} \geq 0 \iff x \in (\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{(k+1)\pi}{2})$ con $k \in \mathbb{Z}$ pari (quindi è convessa per questi x, altrimenti è concava). Siccome la derivata seconda non è mai nulla nel dominio, non abbiamo punti di flesso.

16. $f(x) = x - \dfrac{\log(x)}{x}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Segno: Sempre positiva
- Simmetrie: Nè pari nè dispari.
- Asintoti: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, quindi c'è l' asintoto verticale $x = 0$, mentre non c'è asintoto orizzontale perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La retta $y = x$ è un asintoto obliquo per la funzione.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} \geq 0 \iff x \geq 1$ (come si può dedurre dallo studio di funzione della derivata prima, che è crescente per $x \leq 1$ e diventa decrescente dopo il suo punto di massimo che è sopra il suo asintoto orizzontale).
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{3 - 2\log(x)}{x^3} \geq 0 \iff x \leq e^{\frac{3}{2}}$, pertanto abbiamo un punto di flesso per $x = e^{\frac{3}{2}}$.

17. $f(x) = x^x = e^{x \log x}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Segno: sempre positiva
- Asintoti orizzontali: Non ci sono poiché $\lim_{x\to\infty} x^x = +\infty$
- Asintoti verticali: Non ci sono, infatti $\lim_{x\to 0^+} e^{x \log x} = 1$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, infatti $\lim_{x\to\infty} x^{x-1} = +\infty$
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = e^{x \log x}(\log x + 1) \geq 0 \iff x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$, quindi l'unico punto critico è $\frac{1}{e}$ ed è un punto di minimo.

18. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{|x-1|}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Segno: $f(x) > 0 \iff x > \frac{1}{2}$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (quindi l'asse x è un asintoto)
- Asintoti verticali: Non ci sono, infatti $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché c'è quello orizzontale.
- Derivata prima e punti critici: (Conviene dividere nei casi $x > 1$ e $x < 1$ per calcolare la derivata)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} & \text{se} \quad x > 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

  Si noti che in $x = 1$ la funzione non è derivabile (i limiti laterali del rapporto incrementale sono diversi, fanno il destro $-\infty$ ed il sinistro $+\infty$, questo tipo di punti si chiamano cuspidi). La derivata prima di f è sempre strettamente negativa per $x > 1$ e strettamente positiva per $0 < x < 1$, di conseguenza non abbiamo punti critici.

19. $f(x) = e^{\arctan(5x)}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Segno: Sempre positiva.
- Simmetrie: Nè pari nè dispari.
- Asintoti: Non ci sono asintoti verticali e obliqui; ci sono gli asintoti orizzontali sia a $+\infty$ che a $-\infty$, infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}$.
- Derivata prima e punti critici: Si osservi che la funzione è strettamente crescente perché composizione di funzioni strettamente crescenti, dunque non ha punti critici (questo argomento permetteva di concludere senza calcolare la derivata prima, ma comunque si poteva calcolare e vedere che è positiva: $f'(x) = \frac{5e^{\arctan(5x)}}{1+25x^2}$).
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{25e^{\arctan(5x)} - 250e^{\arctan(5x)}x}{(1+25x^2)^2} \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{10}$.

20. $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}-3}$ (Per fare i conti può essere utile fare il cambio $t = e^{2x}$)

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\log 3}{2}\}$.
- Segno: $f(x) \geq 0 \iff x > \frac{\log 3}{2}$.
- Simmetrie: Nè pari nè dispari
- Asintoti: $\lim_{x\to\frac{\log 3}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{\log 3}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = \dfrac{2e^{6x} - 12e^{4x}}{(e^{2x}-3)^2} \geq \dfrac{1}{2}\log(6)$, quindi per $x = \frac{\log 6}{2}$ abbiamo un punto di minimo.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{4e^{8x} - 36e^{6x} + 144e^{4x}}{(e^{2x}-3)^3} \geq 0 \iff x > \dfrac{\log 3}{2}$, dunque non ci sono punti di flesso.

21. $f(x) = \sin^2 x - \cos x$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Segno: Ponendo $t = \cos x \in [-1, 1]$,
$$f(x) = -t^2 - t + 1.$$
- Simmetrie: $f(-x) = f(x)$, quindi f è pari.
- Asintoti: Nessun asintoto (funzione periodica).

- Derivata prima:
$$f'(x) = \sin x(1 + 2\cos x).$$
Punti critici:
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$
- Derivata seconda:
$$f''(x) = \cos x + 2\cos(2x) = \cos(x) + 2(2\cos^2 x - 1) = 0 \iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

22. $f(x) = \sqrt{|x^2 - 3x|} - x$
    - Dominio: $\mathbb{R}$.
    - Segno:
    $$f(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \frac{3}{2}.$$
    $$f(x) \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{3}{2}, \qquad f(x) < 0 \text{ per } x > \frac{3}{2}.$$
    - Simmetrie: Nessuna.
    - Asintoti:
        - $x \to +\infty$: $\sqrt{x^2 - 3x} = x - \frac{3}{2} + o(1) \Rightarrow f(x) \to -\frac{3}{2}$, asintoto orizzontale $y = -\frac{3}{2}$.
        - $x \to -\infty$: $\sqrt{x^2 - 3x} = -x + \frac{3}{2} + o(1) \Rightarrow f(x) = -2x + \frac{3}{2} + o(1)$, asintoto obliquo $y = -2x + \frac{3}{2}$.
    - Derivata prima: Per tratti:
    $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x} - x, & x \leq 0 \text{ o } x \geq 3, \\ \sqrt{-x^2 + 3x} - x, & 0 < x < 3, \end{cases}$$
    $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} - 1, & x \leq 0 \text{ o } x \geq 3, \\ \dfrac{3 - 2x}{2\sqrt{-x^2 + 3x}} - 1, & 0 < x < 3. \end{cases}$$
    Si risolve $f'(x) = 0$ in $(0, 3)$:
    $$8x^2 - 24x + 9 = 0$$
    $$x = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$
    Punti critici non derivabili: $x = 0$, $x = 3$.

- Derivata seconda: Per $0 < x < 3$:

$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{-x^2+3x} - (3-2x)\frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x}}}{4(-x^2+3x)}.$$

(Analoghe formule valgono sugli altri tratti.)

23. $f(x) = \sin\left(\frac{10}{x^2+1}\right)$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Simmetrie: Pari
- Segno: $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{10}{\pi}-1}) \cup (-\sqrt{\frac{10}{2\pi}-1}, -\sqrt{\frac{10}{3\pi}-1}) \cup (\sqrt{\frac{10}{3\pi}-1}, \sqrt{\frac{10}{2\pi}-1}) \cup (\sqrt{\frac{10}{\pi}-1}, +\infty)$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (quindi l'asse x è un asintoto sia a $+\infty$ che a $-\infty$)
- Asintoti verticali: Non ci sono poiché il dominio è tutto $\mathbb{R}$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché ci sono quelli orizzontali.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = -\frac{20x}{(x^2+1)^2}\cos(\frac{10}{x^2+1}) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{20-\pi}{\pi}}) \cup (-\sqrt{\frac{20-3\pi}{3\pi}}, -\sqrt{\frac{20-5\pi}{5\pi}}) \cup (0, \sqrt{\frac{20-5\pi}{5\pi}}) \cup (\sqrt{\frac{20-3\pi}{3\pi}}, \sqrt{\frac{20-\pi}{\pi}})$, i punti critici sono gli estremi degli intervalli e sono massimi o minimi alternati (cominciando con un massimo, vedi figura 4)

24. $f(x) = \log\log x - \frac{1}{|\log\log x|}$

- Dominio: $(1, e) \cup (e, +\infty)$
- Segno: $f(x) > 0 \iff x \in (e^e, +\infty)$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, quindi non abbiamo asintoti.
- Asintoti verticali: $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^\pm} f(x) = -\infty$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- Suggerimento: Invece di studiare la derivata prima, studiare la monotonia della funzione $g(t) = t - \frac{1}{|t|}$, dal momento che $\log\log x$ è monotona questo ci darà la monotonia di $f(x) = g(\log\log x)$ (anche nello studio del segno si poteva, volendo, cambiare variabile $t = \log\log x$ per semplificarsi i conti).

25. $f(x) = \arccos\big(\sin(\frac{2}{3}x)\big)$

- Dominio: $\mathbb{R}$.

- Segno: $\sin\frac{2}{3}x \in [-1,1]$ quindi $f(x) \in [0,\pi]$; in particolare
$$f(x) = 0 \iff \sin\tfrac{2}{3}x = 1 \iff x = \tfrac{3\pi}{4} + 3k\pi,$$
$$f(x) = \pi \iff \sin\tfrac{2}{3}x = -1 \iff x = -\tfrac{3\pi}{4} + 3k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
- Simmetrie:
$$f(-x) = \arccos\big(\sin(-\tfrac{2}{3}x)\big) = \arccos\big(-\sin\tfrac{2}{3}x\big) = \pi - \arccos\big(\sin\tfrac{2}{3}x\big) = \pi - f(x),$$
quindi $f(-x)+f(x) = \pi$ (simmetria centrale rispetto al punto $(0, \frac{\pi}{2})$).
Non è pari né dispari.
- Asintoti: f è 3π-periodica (periodo di $\sin(\frac{2}{3}x)$), quindi non ha asintoti.
- Derivata prima e punti critici: per semplicità poniamo $u(x) = \sin\frac{2}{3}x$. Allora
$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} = -\frac{\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x}{\sqrt{1-\sin^2\frac{2}{3}x}} = -\frac{\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x}{|\cos\frac{2}{3}x|}.$$
Quindi, dove $\cos\frac{2}{3}x \neq 0$,
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & \cos\frac{2}{3}x > 0, \\ +\frac{2}{3}, & \cos\frac{2}{3}x < 0. \end{cases}$$
La derivata non è definita quando $\cos\frac{2}{3}x = 0$, cioè per
$$\tfrac{2}{3}x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2}k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
Non esistono punti con $f'(x) = 0$ (la derivata, dove definita, è costante $\pm\frac{2}{3}$). I punti in cui la derivata manca sono gli unici punti di massimo o minimo; classificazione locale:
  - per $x = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi$ (qui $\sin\frac{2}{3}x = 1$) si passa da $f' = -\frac{2}{3}$ a $f' = +\frac{2}{3}$: minimo locale con $f = 0$;
  - per $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} + 3k\pi = -\frac{3\pi}{4} + 3(k+1)\pi$ (qui $\sin\frac{2}{3}x = -1$) si passa da $f' = +\frac{2}{3}$ a $f' = -\frac{2}{3}$: massimo locale con $f = \pi$.
- Derivata seconda: dove definita (cioè per $\cos\frac{2}{3}x \neq 0$) $f'(x)$ è costante, quindi
$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \;\; \cos\tfrac{2}{3}x \neq 0.$$
In corrispondenza di $\cos\frac{2}{3}x = 0$ la derivata prima non è continua e f'' non è definita.

Esercizio 2. Troviamo dapprima il flesso della funzione $f(x) = 4\log x + 2x^2 + x + 1$: $f''(x) = 4 - \frac{4}{x^2} \geq 0 \iff \frac{1}{x^2} \leq 1 \iff x \geq 1$ dove nell'ultima equivalenza abbiamo usato che la funzione è definita solo per gli x positivi, dunque il punto di flesso è $x = 1$. L'equazione della retta tangente ad f in $x = 1$ è
$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 4 + 9(x-1) = 9x - 5$$

Esercizio 3. Abbiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, pertanto se $\alpha \neq 0$ abbiamo una discontinuità eliminabile, mentre se $\alpha = 0$ abbiamo che la funzione è continua. Siccome una funzione derivabile in un punto, è anche continua in quel punto, per studiare la derivabilità supponiamo $\alpha = 0$ (altrimenti non è derivabile):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} (\log|h|)^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

pertanto la funzione non è derivabile ed ha un flesso a tangente verticale come punto di non derivabilità.

Esercizio 4. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, a meno di scambiare i ruoli, supponiamo senza perdità di generalità $x < y$. Dal Teorema di Lagrange, esiste $\zeta \in (x, y)$ tale che

$$f'(\zeta) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Dalle ipotesi abbiamo $|f'(\zeta)| \leq M$, pertanto

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\zeta)||x - y| \leq M|x - y|.$$

Esercizio 5. Osserviamo che $f(-\sqrt{7}) = 0 = f(-(\frac{1}{3})^{\frac{1}{5}})$, pertanto per il Teorema di Rolle esiste $x_1 \in (-\sqrt{7}, -3^{\frac{1}{5}})$ punto critico della funzione f. Analogamente, siccome $f(-3^{\frac{1}{5}}) = f(\sqrt{7})$, per il Teorema di Rolle esiste $x_2 \in (-(\frac{1}{3})^{\frac{1}{5}}, \sqrt{7})$ punto critico della funzione f.

Esercizio 6. Abbiamo $f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto la funzione è strettamente crescente (perché i punti in cui la derivata prima è zero sono isolati), dunque è iniettiva. Inoltre $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, quindi per il Teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori reali, pertanto è anche suriettiva.

Esercizio 7. Per trovare i massimi, calcoliamo la derivata:

$$c'(t) = 1,35\, e^{-2,802t}(1 - 2,802\, t).$$

Poniamo $c'(t) = 0$:

$$1,35\, e^{-2,802t}(1 - 2,802\, t) = 0.$$

Poiché $1,35\, e^{-2,802t} \neq 0$ per ogni t, abbiamo:

$$1 - 2,802\, t = 0 \implies t = \frac{1}{2,802} \text{ ore}$$

La derivata cambia segno da positiva a negativa in $t = \frac{1}{2,802}$, quindi questo è un massimo e corrisponde al momento peggiore per mettersi alla guida (che corrispondono circa a 21 minuti!); la concentrazione massima dunque è

$$c_{\max} = c\Big(\frac{1}{2,802}\Big) = 1,35 \cdot \frac{1}{2,802} \cdot e^{-2,802 \cdot \frac{1}{2,802}} = \frac{1,35}{2,802} \cdot e^{-1} \text{ mg/ml}.$$