

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 7

Esercizio 1.

1. Ricordando che la derivata di $\log(f(x))$ è $\frac{f'(x)}{f(x)}$ otteniamo $\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \log \log x + c$
2. $\int \frac{x^\pi + 3x^5}{x^e} dx = \int x^{\pi-e} dx + 3 \int x^{5-e} dx = \frac{x^{\pi-e+1}}{\pi-e+1} + 3 \frac{x^{6-e}}{6-e} + c$
3. $\int (\tan x + \cot x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx + \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = -\log(|\cos x|) + \log(|\sin x|) + c = \log |\tan x| + c$
4. Ricordando che la derivata di $\arctan(f(x))$ è $\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$ otteniamo $\int \frac{8x^3}{1+x^8} dx = 2 \int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2} dx = 2 \int \frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2} dx = 2 \arctan(x^4) + c$
5. $\int_c \frac{3 \sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{2x}} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \int (2\sqrt{x})' \sin(2\sqrt{x}) dx = -\frac{3}{\sqrt{2}} \cos(2\sqrt{x}) +$
6. $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 - 3x^2 + 1)'}{x^3 - 3x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \log(|x^3 - 3x^2 + 1|) + c$

7. $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = - \int \left(\frac{1}{x}\right)' \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x} + c$
8. $\int_c |x| dx = \begin{cases} \int x dx & \text{se } x \geq 0 \\ \int -x dx & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & \text{se } x < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(x) \frac{x^2}{2} + c$
9. $\int \frac{2}{x^2 + 9} dx = \frac{2}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{x}{3})^2} dx = \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$
10. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 11}{x + \sqrt{2}} dx$, usando la divisione tra polinomi si ottiene che $x^2 - 2\sqrt{2}x + 11 = (x + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) + 17$ quindi: $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 11}{x + \sqrt{2}} dx = \int x - 3\sqrt{2} + \frac{17}{x + \sqrt{2}} dx = \frac{x^2}{2} - 3\sqrt{2}x + 17 \log(|x + \sqrt{2}|) + c$
11. Usiamo l'integrazione per parti $\int 2 \log^2 x dx = 2x \log^2 x - 4 \int \log x dx = 2x \log^2 x - 4x \log x + 4x + c$
12. $\int e^{-x} \cos(x) dx = -e^{-x} \cos(x) - \int e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) - \int e^{-x} \cos(x) dx$ portando $-\int e^{-x} \cos(x) dx$ al primo membro si ottiene $2 \int e^{-x} \cos(x) dx = e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)$ e quindi $\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)}{2} + c$
13. $\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$
14. $\int \cosh^3(x) dx = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8} \int e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{3x}}{3} + 3e^x - 3e^{-x} - \frac{e^{-3x}}{3}\right) + c = \frac{1}{12} \sinh(3x) + \frac{3}{4} \sinh(x) + c$
15. $\int \frac{\log(x)}{x^4} dx = -\frac{\log(x)}{3x^3} + \int \frac{1}{3x^4} dx = -\frac{\log(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + c$
16. $\int \frac{\log^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \int 3 \log^2 x (\log x)' dx = \frac{1}{3} \log^3 x + c$

$$17. \int x^3 \sinh(x^4 + 5) dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \sinh(x^4 + 5) dx = \frac{1}{4} \int (x^4 + 5)' \sinh(x^4 + 5) dx = \frac{1}{4} \cosh(x^4 + 5) + c$$

$$18. \int \frac{\cos(2x)}{[\cos^4(x) - 2 \sin^2(x) \cos^2(x) + \sin^4(x)] \sin(2x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(2x) \tan(2x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(\tan(2x))'}{\tan(2x)} dx = \frac{1}{2} \log |\tan(2x)| + c$$

$$19. \int \frac{x^2 + 2x - 1}{x - x^3} dx = \int \frac{x^2 + 2x - 1}{x(1-x)(1+x)} dx, \text{ usando i fratti semplici: } \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x(1-x)(1+x)}, (B-A-C)x^2 + (B+C)x + A = x^2 + 2x - 1$$

otteniamo $A = -1, B = 1, C = 1$ quindi $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x - x^3} dx = \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} dx = -\log|x| - \log|1-x| + \log|1+x| + c$

$$20. \int \frac{5x-3}{x^2-5x+6} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x-5+19/5}{x^2-5x+6} dx = \frac{5}{2} \int \frac{(x^2-5x+6)'}{x^2-5x+6} dx + \frac{19}{2} \int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = \frac{5}{2} \log|x^2-5x+6| + \frac{19}{2} \int \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx = \frac{5}{2} \log|(x-3)(x-2)| + \frac{19}{2} \log \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c = 12 \log|x-3| - 7 \log|x-2| + c$$

$$21. \int \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{x^2 + 6x + 4} dx = \int \left(x - 10 + \frac{56x + 46}{x^2 + 6x + 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 10x + 28 \int \frac{2x + 6 - 61/14}{x^2 + 6x + 4} dx = \frac{x^2}{2} - 10x + 28 \log|x^2 + 6x + 4| - 122 \int \frac{1}{(x+3-\sqrt{5})(x+3+\sqrt{5})} dx = \frac{x^2}{2} - 10x + 28 \log|x^2 + 6x + 4| - \frac{61}{\sqrt{5}} \int \left(\frac{1}{x+3-\sqrt{5}} - \frac{1}{x+3+\sqrt{5}} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 10x + 28 \log|x+3+\sqrt{5}| + 28 \log|x+3-\sqrt{5}| - \frac{61}{\sqrt{5}} \log|x+3-\sqrt{5}| + \frac{61}{\sqrt{5}} \log|x+3+\sqrt{5}| + c = \frac{x^2}{2} - 10x + (28 + \frac{61}{\sqrt{5}}) \log|x+3+\sqrt{5}| + (28 - \frac{61}{\sqrt{5}}) \log|x+3-\sqrt{5}| + c$$

$$22. \int \frac{49^x - 1}{\sqrt{7^x}} dx = \int 7^{\frac{3x}{2}} - 7^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{2 \cdot 7^{\frac{3}{2}x}}{3 \log(7)} + \frac{2 \cdot 7^{-\frac{x}{2}}}{\log(7)} + c$$

23. Osserviamo che:

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = x^x (\log x + 1)$$

Da cui segue immediatamente che: $\int (1 + \log x) x^x dx = x^x + c$

24. Facendo la divisione tra polinomi si ottiene $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx = \int x + 3 + \frac{14x^2 - 8x + 19}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{14x^2 - 8x + 19}{(x-1)^3} dx$. Usiamo i fratti semplici: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{14x^2 - 8x + 19}{(x-1)^3}$, risolvendo il sistema si ottiene che $A = 14, B = 20, C = 25$. Quindi $\frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{14x^2 - 8x + 19}{(x-1)^3} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{14}{(x-1)^3} + \frac{20}{(x-1)^2} + \frac{25}{(x-1)^3} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 14 \log|x-1| - \frac{20}{(x-1)} - \frac{25}{2(x-1)^2} + c$

25. Osserviamo che:

$$(\arctan(x)^{\arctan(x)})' = (e^{\arctan(x) \log(\arctan(x))})' = [\log(\arctan(x)) + 1] \frac{(\arctan(x))^{\arctan(x)}}{x^2 + 1}$$

Da cui segue immediatamente che: $\int [\log(\arctan(x)) + 1] \frac{(\arctan(x))^{\arctan(x)}}{x^2 + 1} dx = \arctan(x)^{\arctan(x)} + c$

26. $\int \frac{x - \sqrt{\arctan(3x)}}{1 + 9x^2} dx = \int \frac{x}{1 + 9x^2} dx - \int \frac{\sqrt{\arctan(3x)}}{1 + (3x)^2} dx = \frac{1}{18} \int \frac{18x}{1 + 9x^2} dx - \frac{2}{9} \int \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{\arctan(3x)}}{1 + (3x)^2} dx = \frac{1}{18} \int \frac{(1 + 9x^2)'}{1 + 9x^2} dx - \frac{2}{9} \int \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\arctan(3x)} (\arctan(3x))' dx = \frac{1}{18} \log(1 + 9x^2) - \frac{2}{9} (\arctan(3x))^{\frac{3}{2}} + c$

27. $\int \frac{x^{11}}{1 + 2x} dx = \int \left(\frac{x^{10}}{2} - \frac{x^9}{4} + \frac{x^8}{8} - \frac{x^7}{16} + \frac{x^6}{32} - \frac{x^5}{64} + \frac{x^4}{128} - \frac{x^3}{256} + \frac{x^2}{512} - \frac{x}{1024} + \frac{1}{2048} - \frac{1}{2048(2x+1)} \right) dx = \frac{x^{11}}{22} - \frac{x^{10}}{40} + \frac{x^9}{72} - \frac{x^8}{128} + \frac{x^7}{224} - \frac{x^6}{384} + \frac{x^5}{640} - \frac{x^4}{1024} + \frac{x^3}{1536} - \frac{x^2}{2048} + \frac{x}{2048} - \frac{\log|2x+1|}{4096} + c$

28. $\int \frac{x^5 + 3}{4x^2 + 1} dx = \int \frac{x^5}{4x^2 + 1} dx + \int \frac{3}{(2x)^2 + 1} dx = \int \frac{x^3}{4} - \frac{x}{16} + \frac{x}{16(4x^2 + 1)} dx + \frac{3}{2} \int \frac{2}{(2x)^2 + 1} dx = \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{32} + \frac{1}{128} \int \frac{8x}{4x^2 + 1} dx + \frac{3}{2} \arctan(2x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{32} + \frac{1}{128} \log(4x^2 + 1) + \frac{3}{2} \arctan(2x) + c$

$$29. \int x \log \left(\frac{x-1}{1+x} \right) dx = \frac{x^2}{2} \log \left(\frac{x-1}{1+x} \right) - \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} \log \left(\frac{x-1}{1+x} \right) - \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} \log \left(\frac{x-1}{1+x} \right) - x + \operatorname{arctanh}(x) + c$$

$$30. \int x^5 e^{-x^2} dx = \int x^4 \cdot x e^{-x^2} dx = x^4 \frac{e^{-x^2}}{-2} + \frac{1}{2} \int 4x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{x^4 e^{-x^2}}{2} + 2 \left[x^2 \frac{e^{-x^2}}{-2} + \frac{1}{2} \int 2x e^{-x^2} dx \right] = -\frac{x^4 e^{-x^2}}{2} - x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c$$

31. Svolgiamo separatamente i due integrali:

- $\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$
- $\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \frac{1}{3} \int 3 \sin^2(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^3(x)}{3} + c$

$$\text{Quindi } \int (\max\{x, \sin(x)\})^2 \cos(x) dx = \begin{cases} \frac{\sin^3(x)}{3} + c & \text{se } x < 0 \\ x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$32. \int \arctan \left(\frac{x+4}{x-2} \right) dx = x \arctan \left(\frac{x+4}{x-2} \right) + \int \frac{6x}{(1 + \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^2)(x-2)^2} dx = x \arctan \left(\frac{x+4}{x-2} \right) + \int \frac{3x}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$\text{Usando i fratti semplici abbiamo } \int \frac{3x}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 10} dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{3}{2} \log(|x^2 + 2x + 10|) - \arctan \left(\frac{x+1}{3} \right) + c =$$

In conclusione l'integrale di partenza è

$$x \arctan \left(\frac{x+4}{x-2} \right) + \frac{3}{2} \log(|x^2 + 2x + 10|) - \arctan \left(\frac{x+1}{3} \right) + c$$

$$33. \int \frac{x - \arcsin(x) + \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin^2(x) - \frac{1}{2} \arccos^2(x) + c$$

$$34. \text{ Usando i fratti semplici si ottiene } \int \frac{15x^2 - 4x - 81}{x^3 - 13x + 12} dx = \int \frac{7}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx + \int \frac{5}{x+4} dx = 7 \log|x-1| + 3 \log|x-3| + 5 \log|x+4| + c$$

$$35. \int 2x \log(1+x) dx = x^2 \log(1+x) - \int \frac{x^2}{1+x} dx = x^2 \log(1+x) - \int x - 1 + \frac{1}{1+x} dx = x^2 \log(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \log(1+x) + c$$

$$36. \int (3x-5) \cos(x) dx = (3x-5) \sin(x) - 3 \int \sin(x) dx = (3x-5) \sin(x) + 3 \cos(x) + c$$

$$37. \text{ Osserviamo che } \int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)} dx = -\frac{1}{2} \sin^{-2}(x) + c \text{ da cui segue che } \int \frac{x \cos(x)}{\sin^3(x)} dx = -\frac{x}{2 \sin^2(x)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{x}{2 \sin^2(x)} - \frac{1}{2} \cot(x) + c$$

$$38. \int x e^x \cos x \sin x dx = \int x e^x \frac{\sin(2x)}{2} dx \text{ svolgiamo prima } \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \left(e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \cos(2x) dx \right) = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \cos(2x) dx \text{ portando l'integrale al primo membro otteniamo } \int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} (e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)) + c. \text{ Analogamente } \int e^x \cos(2x) dx = \frac{1}{5} (2e^x \sin(2x) + e^x \cos(2x)) + c. \text{ Facendo per parti l'integrale di partenza abbiamo } \int x e^x \frac{\sin(2x)}{2} dx = \frac{x}{10} (e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)) - \frac{1}{10} \int e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) dx = \frac{x}{10} (e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)) - \frac{1}{50} (e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)) + \frac{1}{25} (2e^x \sin(2x) + e^x \cos(2x)) + c$$

$$39. \int \frac{2}{4-x^4} dx = \int \frac{2}{(2-x^2)(2+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2-x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{2}}} \right) \right) + \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) + c$$

40. Il polinomio $x^4 + 4$ non ha radici reali tuttavia può essere scomposto come due polinomi di grado 2. Quindi $x^4 + 4$ sarà della forma $(x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D) = x^4 + (A+C)x^3 + (AC+B+D)x^2 + (AD+BC)x + BD = x^4 + 4$ uguagliando i termini di ciascun monomio otteniamo il

$$\text{sistema } \begin{cases} A+C=0 \\ AC+B+D=0 \\ AD+BC=0 \\ BD=4 \end{cases} = \begin{cases} A=-C \\ -C^2+B+D=0 \\ -CD+BC=0 \\ BD=4 \end{cases} \quad D \neq 0 \text{ perchè}$$

altrimenti non si avrebbe il termine noto quindi possiamo dividere per

$$D \text{ e otteniamo: } \begin{cases} A = -C \\ B + D = C^2 \\ C(B - D) = 0 \\ B = \frac{4}{D} \end{cases} \quad \text{Se } C = 0 \text{ allora dalla seconda e dalla}$$

quarta equazione si otterrebbe $-D = \frac{4}{D}$ cioè $D^2 = -4$ che è assurdo quindi

$$\text{necessariamente } C \neq 0 \text{ e possiamo dividere per } C \begin{cases} A = -C \\ B + D = C^2 \\ B - D = 0 \\ B = \frac{4}{D} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} A = -C \\ B + D = C^2 \\ B = D \\ D = \frac{4}{D} \end{cases} = \begin{cases} A = -C \\ 2D = C^2 \\ B = D \\ D^2 = 4 \end{cases} \quad \text{Dato che } 2D \text{ è uguale a } C^2 \text{ che è}$$

un numero positivo l'unica soluzione accettabile della quarta equazione è $D = 2$ da cui segue che $B = 2$, $C = \pm 2$ e $A = \mp 2$ quindi $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

$$\int \frac{2}{4 + x^4} dx = 2 \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} dx$$

$$\text{facendo i fratti semplici otteniamo } 2 \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} dx =$$

$$2 \int \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 + 2x + 2} dx + 2 \int \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx +$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{-x + 2}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{1}{8} \int \frac{-2x + 4}{x^2 - 2x + 2} dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{1}{8} \int \frac{2}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{1}{8} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx -$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{-2}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{8} (\log(x^2 + 2x + 2)) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx -$$

$$\frac{1}{8} (\log(x^2 - 2x + 2)) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} dx = \frac{1}{8} (\log(x^2 + 2x + 2)) -$$

$$\frac{1}{8} (\log(x^2 - 2x + 2)) + \frac{1}{4} \arctan(x + 1) + \frac{1}{4} \arctan(x - 1) + c$$

$$41. \text{ Ricordiamo la formula per la derivata di una frazione } \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$\text{riconosciamo che } \int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \int \frac{(\sin(x))'x - \cos(x)(x)'}{(x)^2} dx =$$

$$\frac{\sin(x)}{x} + c$$

$$42. \text{ Svolgiamo prima } \int (2x^4 + 5x^2 + 1)e^{x^2} dx \text{ per integrali di questo tipo la}$$

primitiva, quando si può scrivere in termini di funzioni elementari, è della forma $p(x)e^{x^2}$ con $p(x)$ un grado più piccolo di $2x^4 + 5x^2 + 1$. Cerchiamo quindi un polinomio di grado 3 tale che $(p(x)e^{x^2})' = (p'(x) + 2xp(x))e^{x^2} = (2x^4 + 5x^2 + 1)e^{x^2}$. Il polinomio generico di grado 3 è della forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ quindi $(p'(x) + 2xp(x)) = 3ax^2 + 2bx + c + 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 + 2dx =$

$$2x^4 + 5x^2 + 1 \text{ mettendo a sistema otteniamo: } \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 0 \\ 3a + 2c = 5 \\ 2d = 0 \\ c = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Segue che $p(x) = x^3 + x$ e quindi $\int (2x^4 + 5x^2 + 1)e^{x^2} dx = (x^3 + x)e^{x^2} + c$.

Integrando per parti otteniamo $\int (2x^4 + 5x^2 + 1)e^{x^2} \arctan(x) dx = (x^3 + x)e^{x^2} \arctan(x) - \int \frac{(x^3 + x)e^{x^2}}{1 + x^2} dx = (x^3 + x)e^{x^2} \arctan(x) - \int xe^{x^2} dx = (x^3 + x)e^{x^2} \arctan(x) - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

43. Studiando il segno di $x^2 - x$ si ottiene che $|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x - x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Segue che $\int (x^2 - x) \sin^2(x) dx = \begin{cases} \int (x^2 - x) \sin^2(x) dx & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ - \int (x^2 - x) \sin^2(x) dx & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Svolgiamo quindi $\int (x^2 - x) \sin^2(x) dx$. Notiamo che $\cos(2x) = \cos^2(x) -$

$\sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)$ da cui segue $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ quindi

l'integrale diventa $\frac{1}{2} \int (x^2 - x)(1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \int x^2 - x dx - \frac{1}{2} \int (x^2 -$

$x) \cos(2x) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x^2 - x) \sin(2x) + \frac{1}{4} \int (2x - 1) \sin(2x) dx =$

$\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x^2 - x) \sin(2x) - \frac{1}{8}(2x - 1) \cos(2x) + \frac{1}{8} \int 2 \cos(2x) dx =$

$\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x^2 - x) \sin(2x) - \frac{1}{8}(2x - 1) \cos(2x) + \frac{1}{8} \sin(2x) + c.$

$$\int (x^2 - x) \sin^2(x) dx = \begin{cases} \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x^2 - x) \sin(2x) - \frac{1}{8}(2x - 1) \cos(2x) + \frac{1}{8} \sin(2x) + c & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ - \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x^2 - x) \sin(2x) - \frac{1}{8}(2x - 1) \cos(2x) + \frac{1}{8} \sin(2x) \right) + c & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

44. Riscrivendo x^2 come $\frac{(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})}{4} + \frac{1}{2}$ otteniamo $\int x^2 e^{x^2 - \sqrt{2}x} dx =$

$$\int \frac{(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{4} + \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{2} dx = \int \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{2} dx + \frac{1}{4} \int (2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})e^{x^2 - \sqrt{2}x} dx. \text{ Notiamo che } \frac{1}{4} \int (2x - \sqrt{2})e^{x^2 - \sqrt{2}x} dx = \frac{1}{4} e^{x^2 - \sqrt{2}x} \text{ quindi svolgendo } \frac{1}{4} \int (2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})e^{x^2 - \sqrt{2}x} dx \text{ per parti otteniamo } \frac{1}{4} \int (2x - \sqrt{2})e^{x^2 - \sqrt{2}x}(2x + \sqrt{2}) dx = \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}(2x + \sqrt{2})}{4} - \int \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{2} dx. \text{ Quindi } \int x^2 e^{x^2 - \sqrt{2}x} dx = \int \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{2} dx + \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}(2x + \sqrt{2})}{4} - \int \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}}{2} dx = \frac{e^{x^2 - \sqrt{2}x}(2x + \sqrt{2})}{4} + c$$

45. Ricordiamo la seguente identità trigonometrica $\sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) = (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\sin(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + (1 - 2\sin^2(x))\sin(x) = 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \implies \sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$ quindi l'integrale diventa $\int (x^2 + 1)e^x \sin^3(x) dx = \int (x^2 + 1)e^x \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4} dx = \frac{3}{4} \int (x^2 + 1)e^x \sin(x) dx - \frac{1}{4} \int (x^2 + 1)e^x \sin(3x) dx$. Prima di svolgere i due integrali notiamo che:

- (a) $\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$ e quindi $\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + c$
- (b) $\int e^x \sin(3x) dx = e^x \sin(3x) - 3 \int e^x \cos(3x) dx = e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x) - 9 \int e^x \sin(3x) dx$ e quindi $\int e^x \sin(3x) dx = \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} + c$
- (c) $\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$ e quindi $\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} + c$
- (d) $\int e^x \cos(3x) dx = e^x \cos(3x) + 3 \int e^x \sin(3x) dx = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9 \int e^x \cos(3x) dx$ e quindi $\int e^x \cos(3x) dx = \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)}{10} + c$
- (e) $\int e^x (\cos(x) - \sin(x)) dx = e^x \cos(x) + c$
- (f) $\int e^x (\cos(x) + \sin(x)) dx = e^x \sin(x) + c$

Quindi, svolgendo separatamente i due integrali di partenza, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \frac{3}{4} \int (x^2+1)e^x \sin(x) dx = \frac{3}{4}(x^2+1) \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} - \frac{3}{4} \int x e^x \sin(x) dx + \\
& \frac{3}{4} \int x e^x \cos(x) dx = \frac{3}{4}(x^2+1) \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + \frac{3}{4} \int x e^x (\cos(x) - \\
& \sin(x)) dx = \frac{3}{4}(x^2+1) \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + \frac{3}{4} x e^x \cos(x) - \frac{3}{4} \int e^x \cos(x) dx = \\
& \frac{3}{4}(x^2+1) \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + \frac{3}{4} x e^x \cos(x) - \frac{3}{4} \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} + \\
& c = \frac{3}{8} e^x (x^2 \sin(x) - (x^2 - 2x + 2) \cos(x)) + c. \\
\bullet \quad & -\frac{1}{4} \int (x^2+1)e^x \sin(3x) dx = -\frac{1}{4}(x^2+1) \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} + \\
& \frac{1}{2} \int x \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} dx = -\frac{1}{40}(x^2+1)(e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) + \\
& \frac{1}{20} \int x e^x \sin(3x) dx - \frac{1}{20} \int x e^x \cos(3x) dx = -\frac{1}{40}(x^2+1)(e^x \sin(3x) - \\
& 3e^x \cos(3x)) + \frac{1}{20} x \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} - \frac{1}{20} \int \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} dx - \\
& \frac{1}{20} x \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)}{10} + \frac{1}{20} \int \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)}{10} dx = \\
& -\frac{1}{40}(x^2+1)(e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) + \frac{1}{200} x (e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) - \\
& \frac{1}{200} x (e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)) + \frac{1}{200} \int 4e^x \cos(3x) dx + \frac{1}{200} \int 2e^x \sin(3x) dx = \\
& -\frac{1}{40}(x^2+1)(e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) - \frac{1}{200} x (2e^x \sin(3x) + 4e^x \cos(3x)) + \\
& \frac{1}{50} \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)}{10} + \frac{1}{100} \frac{e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)}{10} + c = -\frac{1}{1000} (e^x ((25x^2 + \\
& 40x + 12) \sin(3x) + (-75x^2 + 30x - 66) \cos(3x))) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In definitiva } & \int (x^2+1)e^x \sin^3(x) dx = \frac{3}{8} e^x (x^2 \sin(x) - (x^2 - 2x + 2) \cos(x)) - \\
& \frac{1}{1000} (e^x ((25x^2 + 40x + 12) \sin(3x) + (-75x^2 + 30x - 66) \cos(3x))) + c
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia $f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x)$ è continua in

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$, consideriamo le successioni $a_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$ e $b_n = \frac{1}{2\pi n}$. Dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ dalla definizione di limite segue che $\exists N > 0$ tale che $a_n, b_n < a \forall n \geq N$, quindi gli intervalli $[a_n, b_n] \subset [-a, a] \forall n \geq N$. Notiamo che $f(a_n) = 2 \frac{1}{\pi + 2\pi n} \sin(\pi + 2\pi n) - \cos(\pi + 2\pi n) = 1$ e $f(b_n) = 2 \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1$ quindi, poiché $f(x)$ è continua su $[a_n, b_n]$, per il teorema dei valori intermedi $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a_n, b_n]$ tale che

$f(x_n) = \frac{1}{5}$. Quindi, dato che $x_n \in [-a, a] \forall n \geq N$, $f(x) = \frac{1}{5}$ ha infinite soluzioni in $[-a, a]$.

Esercizio 3.

Sia $I = [7, 17]$ l'intervallo di tempo (espresso in ore), e sia $f(x)$ la funzione che descrive la posizione del monaco, che per ipotesi è continua e derivabile nell'intervallo I (il monaco non è grado di teletrasportarsi e il suo tragitto è liscio e regolare). Sappiamo che $f(7) = f(17) = 0$, dato che il monaco parte da casa alle 7 e ci ritorna alle 17, quindi per il teorema di Rolle $\exists x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Sia $I = [19, 21]$ l'intervallo di tempo (espresso in ore) e sia $f(x)$ la funzione che descrive la posizione del monaco, che per ipotesi è continua e derivabile nell'intervallo I . Per il teorema di Lagrange $\exists x_0 \in [19, 21]$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(21) - f(19)}{21h - 19h} = \frac{500m - 0m}{2h} = 250 \text{ m/h}$.