

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 8

Esercizio 1.

1. $\int_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \int_0^1 e^{x \log(\frac{2}{3})} dx = \left[e^{x \log(\frac{2}{3})} \frac{1}{\log(\frac{2}{3})} \right]_0^1 = -\frac{1}{3 \log(\frac{2}{3})}$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x^2 - 1}{2 + 3x + x^2} dx &= \int_0^2 \frac{2(x^2 + 3x + 2) - 6x - 5}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{6x + 5}{(x + 1)(x + 2)} \right) dx \\ &= \int_0^2 2 dx - \int_0^2 \frac{6x + 5}{(x + 1)(x + 2)} dx \end{aligned}$$

Per la frazione facciamo la decomposizione:

$$\frac{6x + 5}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

$$6x + 5 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

$$6 = A + B, \quad 5 = 2A + B$$

$$A = -1, \quad B = 7$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{6x+5}{(x+1)(x+2)} dx &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{7}{x+2} \right) dx \\ &= [-\log(x+1) + 7\log(x+2)]_0^2\end{aligned}$$

Ora mettiamo tutto insieme:

$$\int_0^2 \frac{2x^2-1}{2+3x+x^2} dx = [2x]_0^2 - [-\log(x+1) + 7\log(x+2)]_0^2 = 4 - \log\left(\frac{128}{3}\right)$$

3. Facciamo la sostituzione $t = \log \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x \log x} dx$, quindi abbiamo

$$\int_{e^e}^{e^{e^2}} \frac{1}{x (\log x) (\log^3(\log x))} dx = \int_1^2 t^{-3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^2 = \frac{3}{8}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \arctan(|2x|) dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arctan(2x) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} \arctan(2x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{1+4x^2} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{1+4x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \frac{x}{1+4x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{32} \ln 2 \right) \\ &= \frac{\pi - 2 + 2 \ln 2}{48}.\end{aligned}$$

5. Osserviamo che $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ quando $x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, quindi

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2 - 3x + 1| dx &= \int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x^2 - 3x + 1 dx - \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x^2 - 3x + 1 dx + \\ &\int_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^3 x^2 - 3x + 1 dx = \frac{-9 + 10\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

6. Calcoliamo separatamente i casi $m = \pm n$ e $m \neq \pm n$. Se $m \neq \pm n$ scriviamo le formule di addizione per il coseno (perché lì abbiamo un prodotto di seni) e troviamo una formula per l'integrando:

$$\cos(mx + nx) = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx$$

$$\cos(mx - nx) = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx$$

Se sottraiamo la prima equazione alla seconda e dividiamo per 2 otteniamo

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)}{2}$$

dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) dx = \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Invece se $n = \pm m$ usiamo che $\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$, abbiamo quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pm 1$$

7.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{3 \cos x \sin x + 4 \sin x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - \cos x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x (3 \cos x + 4)}{\cos^2 x - \cos x + 1} dx = \\ &\xrightarrow{u=\cos x} \int_1^{-1} -\frac{3u+4}{u^2-u+1} du = \int_{-1}^1 \frac{3u+4}{u^2-u+1} du \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3/2(2u-1)}{u^2-u+1} + \frac{11/2}{u^2-u+1} \right) du \\ &= \frac{3}{2} \ln(u^2-u+1) \Big|_{-1}^1 + \frac{11}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= -\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u-1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{11}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= -\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{11\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

8. Facciamo la sostituzione $t = e^x$, da cui $dt = e^x dx$, abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{2x}}{4e^{2x} + 4e^x + 1} dx &= \int_1^e \frac{t}{4t^2 + 4t + 1} dt = \frac{1}{8} \int_1^e \frac{8t + 4 - 4}{4t^2 + 4t + 1} dt = \\
&= \frac{1}{8} \int_1^e \frac{8t + 4}{(2t + 1)^2} dt - \frac{1}{4} \int_1^e \frac{2}{(2t + 1)^2} dt = \frac{1}{4} \left[\log(2t + 1) + \frac{1}{2t + 1} \right]_1^e = \\
&= \frac{1}{4} \left(\log(2e + 1) - \log 3 + \frac{1}{2e + 1} - \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} \tan^2(x) dx \stackrel{u=\tan x}{=} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} u^2(1 + u^2) du \\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (u^2 + u^4) du = \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{124}{15} \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

10. Come prima cosa spezziamo l'integrale negli intervalli in cui sappiamo determinare il valore della parte intera:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{8x}{1 + 3x^2} \log(\log(3x^2 + 1)) dx &= \int_1^2 \frac{8x}{1 + 3x^2} [x] \log(\log(3x^2 + 1)) dx + \\
&+ 2 \int_2^3 \frac{8x}{1 + 3x^2} \log(\log(3x^2 + 1)) dx + 3 \int_3^4 \frac{8x}{1 + 3x^2} \log(\log(3x^2 + 1)) dx
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo una qualsiasi primitiva della funzione integranda, dopo sostituiremo tutti gli estremi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{8x}{1 + 3x^2} \log(\log(3x^2 + 1)) dx &\stackrel{u=\log(3x^2+1)}{=} \frac{8}{9} \int \log(u) = \frac{8}{9} (u \log u - u) + \\
c &= \frac{8}{9} \log(3x^2 + 1) (1 + \log \log(3x^2 + 1)) + c
\end{aligned}$$

Sostituendo gli estremi otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{8x}{1 + 3x^2} [x] \log(\log(3x^2 + 1)) dx &= \frac{4}{3} (\log(13)(\log \log 13 - 1) - \log 4(\log \log 4 - 1) + \\
&+ 8/3(-\log(13)(-1 + \log(\log(13))) + \log(28)(-1 + \log(\log(28)))) \\
&- 4(\log(7/4) + \log(28) \log(\log(28)) - \log(49) \log(\log(49))))
\end{aligned}$$

11. Sia $f(x) = (e^{|x|} - 7|x| + \log |x|) \arctan(x) \cos(x)$ notiamo che $f(-x) = (e^{|x|} - 7|x| + \log |x|) \arctan(-x) \cos(x) = -(e^{|x|} - 7|x| + \log |x|) \arctan(x) \cos(x) =$

$-f(x)$, quindi la funzione è dispari. Dalla teoria sappiamo che l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico è sempre 0. Quindi

$$\int_{-1}^1 (e^{|x|} - 7|x| + \log|x|) \arctan(x) \cos(x) dx = 0$$

12. Come prima cosa notiamo che $\frac{x}{1+x} \geq 2x-1 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi l'integrale si spezza in $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 \max\left\{\frac{x}{1+x}, 2x-1\right\} \log(x+1) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{1+x} \log(x+1) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 (2x-1) \log(x+1) dx$. Svolgiamo separatamente i due integrali:

- $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{1+x} \log(x+1) dx \stackrel{u=\log(x+1)}{=} \int_{\log(\frac{1}{2})}^{\log(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)} u(e^u-1) du = [ue^u - e^u - \frac{u^2}{2}]_{\log(\frac{1}{2})}^{\log(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}$
- $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 (2x-1) \log(x+1) dx = [(x^2-x) \log(x+1)]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 \frac{x^2-x}{x+1} dx$

13. Facciamo la sostituzione $t = \cos x$, da cui $dt = -\sin x dx$, dopodichè usiamo la proprietà dei logaritmi per togliere la radice che si crea scrivendo il seno in funzione del coseno e integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \log(\sin(x)) dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 -\log(\sqrt{1-t^2}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \log(1-t^2) dt = \\ \frac{1}{2} \left([t \log(1-t^2)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2t^2}{t^2-1} dt \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 - \frac{2}{t^2-1} dt \right) = \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \end{aligned}$$

14. Facendo la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$ e usando le solite espressioni di

$$\begin{aligned} \sin x \text{ e } \cos x \text{ in funzione di } t \text{ abbiamo } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8+4\sin x+7\cos x} dx &= \\ 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2+8t+15} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{(t+3)(t+5)} dt &= \int_0^1 \frac{1}{t+3} dt - \int_0^1 \frac{1}{t+5} dt = \\ [\log(t+3) - \log(t+5)]_0^1 &= \log\left(\frac{10}{9}\right) \end{aligned}$$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan x)^2} =$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan x)^2} \frac{dx}{\cos^2 x} \stackrel{t=\tan(x)}{=} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^1 (1+t)^{-2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^1 =$
 $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

Esercizio 2.

1.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx \stackrel{t=\sqrt{x+4}}{=} \int \frac{2 dt}{(t^2-4)} dt = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + c$$

$$2. \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx = x \tan(x) - \int \tan(x) dx = x \tan(x) + \log |\cos(x)| + c$$

$$3. \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx = 3 \int \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx \stackrel{\frac{x}{3}=\sinh(t)}{=} 9 \int \sinh^2(t) dt =$$

$$= 9 \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 1}{4} dt = \frac{9}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - t \right) + c$$

Si può vedere che $t = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{3}\right) = \log \left(\sqrt{\frac{x^2}{9} + 1} + \frac{x}{3} \right)$, quindi il risultato finale è:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx = \frac{x\sqrt{9+x^2}}{2} - \frac{9}{2} \log \left(\frac{x + \sqrt{9+x^2}}{3} \right) + c$$

$$4. \int \frac{\sin(x)e^{\cos(x)}}{e^{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}+1} dx = \int \frac{\sin(x)e^{\cos(x)}}{e^{\cos(x)}+1} dx \stackrel{t=e^{\cos(x)}}{=} - \int \frac{1}{t+1} dt =$$

$$= -\log |t+1| + c = -\log(e^{\cos(x)}+1) + c$$

$$5. \int \frac{2x \log^2(\arctan(x^2))}{1+x^4} dx \stackrel{t=\arctan x^2}{=} \int \log^2(t) dt = t \log^2(t) - 2 \int \log(t) dt =$$

$$= t \log^2(t) - 2t \log(t) + 2t + c = \arctan(x)^2 \log^2(\arctan(x)^2) - 2 \arctan(x)^2 \log(\arctan(x)^2) + 2 \arctan(x)^2 + c$$

6. Per calcolare $\int \frac{3x}{\cosh^4(x)} dx$, calcoliamo prima una qualsiasi primitiva di

$$\frac{1}{\cosh^4(x)}, \text{ per poi integrare per parti l'integrale di partenza: } \int \frac{1}{\cosh^4(x)} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} (1 - \tanh^2(x)) dx \stackrel{t=\tanh x}{=} \int 1 - t^2 dt = t - \frac{1}{3}t^3 + c = \tanh x - \frac{1}{3}(\tanh x)^3 + c$$

pertanto

$$\int \frac{3x}{\cosh^4(x)} dx = 3x(\tanh x - \frac{1}{3}(\tanh x)^3) - 3 \int (\tanh x - \frac{1}{3}(\tanh x)^3) =$$

$$3x \tanh x - x(\tanh x)^3 - 3 \log(\cosh x) + \int \frac{(\cosh^2 x - 1) \sinh x}{\cosh^3 x} dx \stackrel{u=\cosh x}{=}$$

$$3x \tanh x - x(\tanh x)^3 - 3 \log(\cosh x) + \int \frac{(u^2 - 1)}{u^3} = 3x \tanh x - x(\tanh x)^3 - 2 \log(\cosh x) + \frac{1}{2(\cosh x)^2} + c$$

7. Facciamo la sostituzione $x = \arctan t$, da cui $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, quindi

$$\int \sqrt{\tan x} dx = \int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

Facciamo ora la sostituzione $u = \sqrt{t}$, da cui $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, ossia $dt = 2u du$, poi facciamo i fratti semplici

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt &= \int \frac{2u^2}{1+u^4} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} + \frac{\sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} - \frac{\sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\log(u^2 - \sqrt{2}u + 1) - \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) \right) + \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{(u - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{(u + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}} \right) du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\log(u^2 - \sqrt{2}u + 1) - \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) \right) + \int \left(\frac{1}{(2u-1)^2 + 1} - \frac{1}{(2u+1)^2 + 1} \right) du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\log(u^2 - \sqrt{2}u + 1) - \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) \right) + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\log(u^2 - \sqrt{2}u + 1) - \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) \right) + \frac{1}{2} (\arctan(s-1) - \arctan(s+1)) + c = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log(\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1) - \log(\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1) + \arctan(2\sqrt{\tan x} - 1) - \arctan(2\sqrt{\tan x} + 1) \right) + c \end{aligned}$$

8. Innanzitutto osserviamo che $x^{\frac{1}{\log x}}$ è uguale ad e , dopodichè per svolgere l'integrale col radicando cerchiamo un cambio di variabile che ci faccia

ottenere tale radicando come un quadrato $\int \frac{67x^{\frac{1}{\log(x)}}}{x + \sqrt{3x^2 + 5x + 7}} dx =$

$67e \int \frac{1}{x + \sqrt{3x^2 + 5x + 7}} dx$ per trovare il cambio di variabile giusto imponiamo $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} = \sqrt{3}x + t$, svolgendo i calcoli per isolare x otteniamo $x = \frac{t^2 - 7}{5 - 2\sqrt{3}t}$, da cui $dx = \frac{2t(2\sqrt{3}t - 5) + 2\sqrt{3}(t^2 - 7)}{(5 - 2\sqrt{3}t)^2} dt$, sostituendo

$$\int \frac{67x^{\frac{1}{\log(x)}}}{x + \sqrt{3x^2 + 5x + 7}} dx = 67e \int \frac{-2\sqrt{3}t^2 + 10t - 14\sqrt{3}}{(5 - 2\sqrt{3}t)((1 - \sqrt{3})t^2 + 5t - 7(\sqrt{3} + 1))} dt,$$

a questo punto basta scomporre (è lungo, quindi non riportiamo i conti, ma è meccanico) l'integrale in fratti semplici ed integrare con logaritmi ed ar-

cotangenti come al solito, il risultato finale è il seguente $\int \frac{67x^{\frac{1}{\log(x)}}}{x + \sqrt{3x^2 + 5x + 7}} dx =$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \log(-12x^2 + \sqrt{3}(4x+5)\sqrt{3x^2+5x+7} + 5\sqrt{3x^2+5x+7} - 5\sqrt{3}x - 25x - \\
& 14\sqrt{3} - 42) - \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \log(\sqrt{3}(2\sqrt{3x^2+5x+7} - 6x - 5) + 6\sqrt{3x^2+5x+7} - \\
& 5 \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{62}(2-\sqrt{3})}(-4\sqrt{3x^2+5x+7} + 4\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} + 5)\right) \\
& 6x - 5) + \frac{\sqrt{31}}{c}
\end{aligned}$$

Commento: Tranquilli se non vi vengono i conti, era un esercizio un po' cattivo. L'importante è che abbiate capito questo metodo (chiamato metodo di Eulero), alternativo alle sostituzioni iperboliche, per trovare un cambio di variabile che trasformi in un integrale polinomiale un'integrale con la radice (se in questo caso si fossero usate le funzioni iperboliche sarebbe venuto comunque, solo che questo è un po' più comodo perché nel caso iperbolico poi andava fatta la sostituzione $u = \tanh \frac{t}{2}$ e ricavare l'analogo delle formule parametriche per le funzioni iperboliche; un'altra sostituzione intelligente poteva essere mediante la tangente dopo aver completato il quadrato, per usare che $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$).

9. Qui integriamo per parti, derivando l'arcoseno: $\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\cos t}{=} \frac{x^2}{2} \arcsin x + \int \frac{\cos^2 t}{2} dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} (\arccos x + \frac{1}{2} \sin(2 \arccos x)) + c$
10. $\int \left(\frac{x^4}{1+x^6} \right) dx = \int \frac{x^8}{(1+x^6)^2} dx \stackrel{u=x^3}{=} \frac{1}{3} \int \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{1+u^2} du - \int \frac{1}{(1+u^2)^2} du \right) \stackrel{u=\tan t}{=} \frac{1}{3} (\arctan u - \int \cos^2 t dt) = \frac{1}{3} \arctan(x^3) - \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{6} \arctan(x^3) - \frac{1}{12} \sin(2 \arctan(x^3)) + c$
11. $\int \sqrt{1 + \cos^2(x)} \sin(2x) \cos(2x) dx = \int \sqrt{1 + \frac{1 + \cos(2x)}{2}} \sin(2x) \cos(2x) dx \stackrel{t=\cos(2x)}{=} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int t\sqrt{3+t} dt \stackrel{u=3+t}{=} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int (u-3)\sqrt{u} du = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int u^{\frac{3}{2}} du - \int 3\sqrt{u} du \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} \right) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{5} (3 + \cos(2x))^{\frac{5}{2}} - (3 + \cos(2x))^{\frac{3}{2}} \right) + c$
12. Integriamo per parti per ricondurci ad un integrale polinomiale e poi svolgiamo i fratti semplici:
$$\begin{aligned}
& \int \log(x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4) dx = x \log(x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4) - \\
& 4) - \int \frac{4x^4 + 15x^3 + 22x^2 + 11x}{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4} dx = x \log(x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4) - \int \left(4 - \frac{2}{x+1} - \frac{3x+8}{x^2+3x+4} \right) dx = x \log(x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4) - 4x + 2 \log|x+1| + \frac{3}{2} \left(\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx + \frac{7}{3} \int \frac{1}{x^2+3x+4} dx \right) = \\
& x \log(x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4) - 4x + 2 \log|x+1| + \frac{3}{2} \log(|x^2+3x+4|) + \sqrt{7} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \int \frac{2e^{2x} - e^x}{\sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1}} dx & \stackrel{t=e^x}{=} \int \frac{2t-1}{\sqrt{3t^2-6t-1}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2(t-1)+1}{\sqrt{(t-1)^2 - \frac{4}{3}}} dt = \\
& = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2 - \frac{4}{3}}} dt + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2 - \frac{4}{3}}} dt = \\
& = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(t-1)^2 - \frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| t-1 + \sqrt{(t-1)^2 - \frac{4}{3}} \right| + c = \\
& = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e^x-1)^2 - \frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| e^x-1 + \sqrt{(e^x-1)^2 - \frac{4}{3}} \right| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \int \frac{1}{\sqrt{25x^2+2}} dx & = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} dx \stackrel{\frac{5x}{\sqrt{2}} = \sinh(t)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{5} dt = \\
& \frac{1}{5} t + c = \frac{1}{5} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{5x}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \int \frac{\tan^3(\log x)}{x} dx & \stackrel{t=\log(x)}{=} \int \tan^3(t) dt = \int \tan(t) \left(\frac{1}{\cos^2(t)} - 1 \right) dt = \\
& = \int \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)} dt - \int \tan(t) dt = \frac{\tan^2(t)}{2} + \log|\cos(t)| + c = \frac{\tan^2(\log(x))}{2} + \log|\cos(\log(x))| + c
\end{aligned}$$