

**Università degli Studi di Roma Tre**  
**A.A. 2025/2026**  
**Corso di Laurea Triennale in Fisica e**  
**Matematica**  
**AM110 - Analisi Matematica I**

Docente: Luca Battaglia  
Esercitatrice: Michela Procesi  
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Tutorato 9

**Esercizio 1.** Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \frac{e^{2t+3} - 2e^{2t-3}}{2 + e^{2t+4}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} + x = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3te^{t^2}x \\ x(0) = \sqrt{e^3} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = (x+1)^{759\pi} \arctan(x) + e^x \log(1+x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = (\tan t)x + \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = \frac{2t(x+x^2)}{1+t^2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} 10\dot{x} - 2tx = t^3 \\ x(0) = -5 \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) + (\sin t)x(t) = \sin t \\ x(0) = e + 1 \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{1+t} + 3 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{1-x^2} \arctan(3t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x \log(x^{\log(t+t^2)}) \\ x(e-1) = e \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 \sin 2t \cos 2t \\ x(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} \ddot{x} = 1 + \dot{x}^2 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} \dot{x} = (2t+x)^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2t+1}{t^2+6t+9}x + (t+3)^2 e^{-5\frac{t+2}{t+3}} \frac{\cos^3(t)}{1+\sin^2(t)} \\ x(-2) = \sin(2) + 2 \arctan(\sin(-2)) \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} \dot{x} = (1-x^2) \frac{t^3+3t-4}{2t^3-5t^2+6t-3} \\ x(\sqrt{3}) = \log_4(67) \end{cases}$$

18. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{xt \cos(t)-x}{t} \\ x(\pi) = 2 \end{cases}$$

19. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{e^t(1-x^2t)-1}{xt^2e^t} \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

20. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{tx^4+\sqrt{x}}{x^3t^3} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Suggerimento: In alcune equazioni potrebbe essere utile fare un cambio di variabile.

**Esercizio 2.** Si consideri  $x(t)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^{500} + x^{400} + x^{300} \\ x(0) = \pi^e + e^\pi \end{cases}$$

Mostrare che  $x(t) > 0$  per ogni  $t \geq 0$ .

**Esercizio 3.** Si consideri  $x(t)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t+x} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

- Mostrare che  $x(t)$  è invertibile (nell'intervallo di esistenza).
- Determinare l'inversa  $t(x)$ .