Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 9

Esercizio 1.

1. Per trovare la soluzione ci basta integrare ambo i membri.

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{e^{2s+3} - 2e^{2s-3}}{2 + e^{2s+4}}\, ds$$

Risolvendo l'integrale e sapendo che $x(0) = 0$ otteniamo:

$$x(t) = \left(\frac{e^6 - 2}{2e^7}\right) \ln\left(\frac{2 + e^{2t+4}}{2 + e^4}\right)$$

2. Ci troviamo davanti un'equazione del tipo $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, sappiamo che la soluzione è data da

$$x(t) = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)}\, dt + c$$

Dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e c la costante additiva che si trova imponendo il dato iniziale. Nel nostro caso dunque $A(t) = t$, dunque la soluzione dell'equazione è

$$x(t) = e^{-t} \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt + c = \sqrt{t} e^{-t} + c$$

imponendo il dato iniziale otteniamo $c = x(0) = 1$, pertanto la soluzione è data

$$x(t) = \sqrt{t} e^{-t} + 1$$

3. Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = 3te^{t^2}x \\ x(0) = \sqrt{e^3} \end{cases}$

   Risolvo l'equazione differenziale con separazione di variabili:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 3te^{t^2}$$

   Integro in dt:

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}\, ds = \int_0^t 3se^{s^2}\, ds$$

   A sinistra faccio il cambio di variabile $x = x(s)$, da cui $dx = \dot{x}(s)ds$, quindi l'uguaglianza diviene

$$\int_{\sqrt{e^3}}^{x(t)} \frac{1}{x}\, dx = \int_0^t 3se^{s^2}\, ds$$

   risolvendo gli integrali e isolando $x(t)$ ottengo:

$$x(t) = e^{\frac{3}{2}e^{t^2}}$$

   (anche questo si poteva svolgere usando la formula per le ode lineari del prim'ordine, come all'esercizio precedente.)

4. Risolviamo $\begin{cases} \dot{x} = 2t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ per separazione di variabili, abbiamo

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^t 2s\, ds$$

   da cui

$$\arcsin x(t) = t^2 \implies x(t) = \sin(t^2)$$

5. La soluzione è quella costante $x(t) = 0$.

6. Sempre usando la formula per Ode lineari del prim'ordine abbiamo

$$x(t) = \frac{\sin t}{2} + \frac{t}{2\cos t}$$

7. Il problema di Cauchy è separabile (col solito cambio di variabile):

$$\frac{dx}{x(1+x)} = \frac{2t}{1+t^2}\, dt.$$

Scomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}.$$

Integrando,

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt,$$

da cui

$$\ln|x| - \ln|1+x| = \ln(1+t^2) + C.$$

Esponenziando,

$$\frac{x}{1+x} = C(1+t^2).$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 1$,

$$\frac{1}{2} = C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1+t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

8. Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} 10\dot{x} - 2tx = t^3 \\ x(0) = -5 \end{cases}$

Risolvo l'equazione omogenea associata con separazione di variabili:

$$10\dot{x} - 2tx = 0$$

e ottengo:

$$x_o(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Ora uso il metodo di delle variazioni di costanti per ottenere la soluzione particolare. Considero una soluzione particolare del tipo:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$$

Quindi $x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$; $\dot{x}_p(t) = \dot{c(t)}e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\frac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}}$ allora l'equazione deve verificare che:

$$10\left(\dot{c(t)}e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\frac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}}\right) - 2t\left(c(t)e^{\frac{t^2}{10}}\right) = t^3$$

Quindi: $c(t) = \frac{1}{10}\displaystyle\int t^3 e^{-\frac{t^2}{10}}\, dt = -\frac{t^2}{2}e^{-\frac{t^2}{10}} - 5e^{-\frac{t^2}{10}} + c$

Allora la soluzione particolare è:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}} = -\frac{t^2}{2} - 5$$

Allora la generica soluzione all'equazione differenziale è:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} - \frac{t^2}{2} - 5 \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Adesso risolvo il problema di Cauchy:

$$-5 = x(0) = c - 5$$

e trovo che $c = 0$ da cui segue che la soluzione al problema è:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} - 5$$

(Ovviamente si poteva usare la formula vista a lezione per Ode lineari del prim'ordine, come fatto nel primo problema di Cauchy dell'esercizio, qui abbiamo fatto lo stesso procedimento che si fa per ricavarla, per far vedere come risolvere l'equazione senza ricordarsi la formula.)

9. Utilizzando la solita formula, otteniamo

$$x(t) = ce^{\cos t} + 1$$

e impostando la condizione iniziale abbiamo

$$x(t) = e^{\cos t} + 1$$

10. Utilizzando sempre la solita formula, otteniamo

$$x(t) = 3(t+1)\log(t+1)$$

11. Il problema è separabile (con il solito cambio):

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arctan(3t)\,dt.$$

Integrando otteniamo

$$\arcsin x = -\int \arctan(3t)\,dt + C.$$

Usando $\int \arctan(3t)\,dt = t\arctan(3t) - \frac{1}{6}\ln(1+9t^2) + C$ si ha

$$\arcsin x = -t\arctan(3t) + \frac{1}{6}\ln(1+9t^2) + C.$$

Imponendo $x(0) = 0$ si ottiene $C = 0$. Quindi

$$\arcsin x(t) = \frac{1}{6} \ln(1 + 9t^2) - t \arctan(3t)$$

e la soluzione esplicita è

$$\boxed{x(t) = \sin\Big(\frac{1}{6} \ln(1 + 9t^2) - t \arctan(3t)\Big)}$$

12. L'equazione è separabile (si assume $t > 0$ perché compare $\ln t$, e la condizione iniziale ha $t_0 = e - 1 > 0$):

$$\frac{dx}{x \ln x} = \ln(t + t^2)\, dt = \big(\ln t + \ln(1 + t)\big)\, dt.$$

Ponendo $F(t) = (1 + t) \ln(1 + t) + t \ln t - 2t$ si ottiene, integrando,

$$\ln |\ln x| = F(t) + C.$$

Imponendo $x(e - 1) = e$ (da cui $\ln x(e - 1) = 1$ e $\ln |\ln x(e - 1)| = 0$) si ricava

$$0 = F(e - 1) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(e - 1).$$

Quindi

$$\ln |\ln x| = F(t) - F(e - 1),$$

e poiché la soluzione con $x(e - 1) = e$ mantiene $x(t) > 0$, si può scrivere senza valore assoluto:

$$\ln x = \exp\big(F(t) - F(e - 1)\big),$$

da cui la soluzione esplicita è

$$\boxed{x(t) = \exp\Big(\exp\big(F(t) - F(e - 1)\big)\Big)}$$

dove $F(t) = (1 + t) \ln(1 + t) + t \ln t - 2t$.

13. L'equazione è separabile:

$$\frac{dx}{x^3} = \sin(2t) \cos(2t)\, dt.$$

Integrando,

$$\int x^{-3}\, dx = \int \sin(2t) \cos(2t)\, dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4} \sin^2(2t) + C.$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = \sqrt{2}$,

$$-\frac{1}{4} = C.$$

Quindi

$$-\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4}\sin^2(2t) - \frac{1}{4},$$

ossia

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}\cos^2(2t).$$

Poiché $x(0) > 0$, si sceglie il ramo positivo e si ottiene

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{2}}{\cos(2t)}},$$

14. Ponendo $v = \dot{x}$ l'equazione si riduce al primo ordine

$$\dot{v} = 1 + v^2.$$

È separabile:

$$\frac{dv}{1+v^2} = dt.$$

Integrando e imponendo $v(0) = 0$ si ottiene

$$\arctan v = t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \tan t.$$

Integrando ancora con $x(0) = 0$,

$$x(t) = \int_0^t \tan s\, ds = -\ln\big|\cos t\big| + C, \quad C = 0,$$

quindi

$$\boxed{x(t) = -\ln(\cos t)}$$

15. A prima occhiata il problema $\begin{cases} x' = (2t + x)^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ non contiene un' equazione del tipo studiato, tuttavia se facciamo il cambio di variabile $z(t) = x(t) + 2t$, otteniamo il problema $\begin{cases} z' = z^2 + 2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$ che ha un'equazione a variabili separabili con soluzione $z(t) = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t)$, quindi $x(t) = z(t) - 2t = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t) - 2x$.

16. Usando sempre la solita formula otteniamo:

$$A(t) = \int_{-2}^{t} \frac{2s+1}{s^2+6s+9}\, ds = \int_{-2}^{t} \frac{2s+1}{(s+3)^2}\, ds = \int_{-2}^{t} \left(\frac{2}{s+3} - \frac{5}{(s+3)^2}\right) ds$$

$$= \left[2\log|s+3| + \frac{5}{s+3}\right]_{-2}^{t} = 2\log(t+3) - 5\frac{t+2}{t+3}.$$

$$\int_{-2}^{t} e^{-A(s)}(s+3)^2 e^{-5s+2} \frac{\cos 3s}{1+\sin^2 s}\, ds = \int_{-2}^{t} \frac{1-\sin^2 s}{1+\sin^2 s} \cos s \, ds \overset{z=\sin s}{=}$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\sin t} \frac{1-z^2}{1+z^2}\, dz = [2\arctan z - z]_{\lambda_0}^{\sin t} = 2\arctan(\sin t) - \sin t - 2\arctan\lambda_0 + \lambda_0.$$

Sostituendo nella formula:

$$\boxed{x(t) = (t+3)^2 e^{-5\frac{t+2}{t+3}} \left[2\arctan(\sin t) - \sin t\right].}$$

17. L'equazione è a variabili separabili:

$$\int_{\log_4(67)}^{x(t)} \frac{dy}{1-y^2} = \int_{\sqrt{3}}^{t} \frac{s^3+3s-4}{2s^3-5s^2+6s-3}\, ds$$

$$\operatorname{arctanh}(x(t)) - \operatorname{arctanh}(\log_4(67)) = \frac{1}{2}\log|2t^3-5t^2+6t-3| - \frac{1}{2}\log(12\sqrt{3}-18)$$

Quindi:

$$x(t) = \tanh\left(\frac{1}{2}\log|2t^3-5t^2+6t-3| - \frac{1}{2}\log(12\sqrt{3}-18) + \operatorname{arctanh}(\log_4(67))\right)$$

18. Fattorizzando si ottiene $\dot{x} = x\left(\cos t - \frac{1}{t}\right)$ che è a variabili separabili:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}\, ds = \int_{\pi}^{t} \left(\cos s - \frac{1}{s}\right)\, ds$$

$$\Rightarrow \ \log\left(\frac{x}{2}\right) = \sin t - \log\left(\frac{t}{\pi}\right) \ \Rightarrow \ x(t) = \frac{2\pi}{t} e^{\sin t}$$

19. Semplificando e moltiplicando per x entrami i membri l'equazione diventa:

$$x\dot{x} = -\frac{x^2}{t} + \frac{1-e^{-t}}{t^2}$$

Facendo il cambio di variabile $y = x^2$ ($\dot{y} = 2x\dot{x}$):

$$\frac{1}{2}\dot{y} = -\frac{y}{t} + \frac{1-e^{-t}}{t^2}$$

Che è un Ode lineare e si risolve con la solita formula:

$$x^2(t) = y(t) = \frac{2(t+e^{-t}) + 2 - \frac{2}{e}}{t^2}$$

$$\Rightarrow \ x(t) = \frac{1}{t}\sqrt{2(t+e^{-t})+2-\frac{2}{e}}$$

Prendiamo il ramo positivo della radice perché $x(1) > 0$.

20. Semplificando e moltiplicando entrambi i membri per $x^{\frac{5}{2}}$ l'equazione diventa:

$$x^{\frac{5}{2}}\dot{x} = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Facendo il cambio di variabile $y = x^{\frac{7}{2}}$ ($\dot{y} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}\dot{x}$):

$$\frac{2}{7}\dot{y} = \frac{y}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Che è un Ode lineare e si risolve con la solita formula:

$$x^{\frac{7}{2}}(t) = y(t) = \frac{2}{7} - \frac{1}{t} + \frac{12}{7}e^{\frac{7}{2}(1-\frac{1}{t})}$$

$$\Rightarrow \ x(t) = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{t} + \frac{12}{7}e^{\frac{7}{2}(1-\frac{1}{t})}\right)^{\frac{2}{7}}$$

Esercizio 2. Osserviamo che $x(0) > 0$, quindi per il teorema di permanenza del segno, $x(t) > 0$ in un intorno di 0, ma allora $x'(t) > 0$ in un intorno del dato iniziale, pertanto $x(t)$ è strettamente crescente in un intorno del dato iniziale, ma siccome $x'(t) = 0 \iff x(t) = 0$ e $x'(t) \geq 0$ abbiamo che la funzione è crescente su tutto l'intervallo di esistenza e dunque è sempre positiva.

Esercizio 3. Sia I l'intervallo di esistenza, abbiamo che $x'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, pertanto dal criterio di monotonia è invertibile. Se usiamo la regola delle derivate di funzioni inverse, otteniamo l'Ode che soddisfa l'inversa e la possiamo trovare risolvendola:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = t + x$$

inoltre $t(0) = 1$, quindi risolvendo con la formula per Ode lineari del prim'ordine otteniamo

$$t(x) = -x + 2e^x - 1$$