AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 1 di martedì 8 ottobre 2024

Argomenti: successioni e serie di funzioni

Esercizio 1.
Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) := \arctan\left(nx + n^2\right).$$

Soluzione: Poiché $nx + n^2 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f_n(x) \to \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; la convergena non è uniforme su $\mathbb{R}$ perché

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| f_n - \frac{\pi}{2} \right| \geq \left| f_n(-n) - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2},$$

ma è uniforme sulle semirette sinistre perché, essendo l'arcotangente crescente,

$$\sup_{[-M,+\infty)} \left| f_n - \frac{\pi}{2} \right| = \sup_{x\geq -M} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(nx + n^2\right) \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(n^2 - Mn\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Esercizio 2.
Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2 x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Soluzione: Il limite puntuale è $\begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ e dunque, poiché le f_n sono continue mentre la funzione limite non lo è, la convergenza non è uniforme; la convergenza è invece uniforme lontano dall'origine perché

$$\sup_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n| = \sup_{|x|\geq\delta} \frac{\left|\sin\left(n^2 x\right)\right|}{|n^2 x|} \leq \sup_{|x|\geq\delta} \frac{1}{n^2|x|} = \frac{1}{n^2\delta} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Esercizio 3.
Calcolare il limite puntuale $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n} & n\pi \leq x \leq 2n\pi \\ 0 & x < n\pi, x > 2n\pi \end{cases},$$

stabilire se la convergenza è uniforme e stabilire se vale l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Il limite puntuale è $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e il limite è anche uniforme perché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

avremo dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

mentre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\mathrm{d}x \overset{(y=\frac{x}{n})}{=} \int_{\pi}^{2\pi} \sin y dy = [-\cos y]_{\pi}^{2\pi} = -2$$

e quindi in particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 4.
Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}.$$

Soluzione: Poiché $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^x}\right|} \underset{n\to+\infty}{\to} |x|$, la serie converge se $|x| < 1$, ma non in ± 1 perché vale rispettivamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$; la convergenza non può essere dunque uniforme, perché non c'è convergenza sul bordo, ma è totale e uniforme sui sottointervalli compatti di $(-1, 1)$ perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|x|\leq 1-\delta} \left|\frac{x^n}{n^x}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\delta}(1-\delta)^n < +\infty.$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) := \cos\frac{nx}{n-1}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, allora $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; la convergenza è uniforme sugli intervalli limitati perché

$$\begin{aligned}
\sup_{[-M,M]} |f_n - f| &= \sup_{|x|\leq M} \left|\cos\left(\frac{nx}{n-1}\right) - \cos x\right| \\
&= \left|\int_x^{\frac{nx}{n-1}} \sin y\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \sup_{|x|\leq M} \left|\frac{nx}{n-1} - x\right| \\
&= M\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

ma non c'è convergenza uniforme su $[0, +\infty)$ né su $(-\infty, 0]$ perché

$$\sup_{\mathbb{R}_\pm} |f_n - f| \geq \left|f_n\left(\pm\frac{n-1}{2}\right) - f\left(\pm\frac{n-1}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)\right| = 1$$

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) := \sin^n x.$$

Soluzione: La funzione limite è $\begin{cases} 0 & x \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \\ 1 & x \in \left(2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \end{cases}$, discontinua, dunque la convergenza non è uniforme, ma lo è lontano da $\left(Z + \frac{1}{2}\right)\pi$ perché

$$\sup_{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\delta, \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi-\delta\right]} |f_n(x)| = \sup_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi+\delta \le x \le \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\delta} |\sin x|^n = \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$