AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 2 di martedì 15 ottobre 2024

Argomenti: serie di funzioni e di potenze

Esercizio 1.
Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\sin^2(nx).$$

Soluzione: La serie converge totalmente sugli intervalli limitati, e dunque uniformemente su questi intervalli e totalmente per ogni valore di x, perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|x|\le M}\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\sin^2(nx)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|x|\le M}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = M^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$$

non c'è invece convergenza uniforme, né quindi totale, su $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non converge uniformemente a 0 in quanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\sin^2(nx)\right| \ge \sin^2\left(\frac{\frac{3}{2}n\pi}{n}\right)\sin^2\left(n\frac{3}{2}n\pi\right) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

Esercizio 2.
Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2}$$

e calcolare

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2}\mathrm{d}x, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: La serie converge totalmente, e dunque puntualmente e uniformemente, perché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

quindi

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\sin(2n\pi x)}{n^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\cos(2n\pi x)}{2n^2\pi}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}0 = 0.$$

Esercizio 3.
Determinare il raggio di convergenza e discutere la convergenza sul bordo dell'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)x^n.$$

Soluzione: Il raggio di convergenza è dato da

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\arctan \frac{1}{n+1}\right|}} = 1;$$

per $x = 1$ si ottiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n+1}$, che diverge per il confronto con la serie armonica, mentre per $x = -1$ si ottiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{n+1}$, che converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 4.
Determinare il raggio di convergenza e discutere la convergenza sul bordo dell'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n.$$

Soluzione: Con il criterio del rapporto si ottiene che il raggio di convergenza è dato da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!}{n^n}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{2(2n+1)} = 0,
\end{aligned}$$

cioè la serie converge solo per $x = 0$.

Esercizio 5.
Determinare il raggio di convergenza, discutere la convergenza sul bordo dell'intervallo di convergenza e calcolare la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Soluzione: Il raggio di convergenza è $\dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1$ e non c'è convergenza per $x = \pm 1$ perché si ottengono le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$. Derivando termine a termine la serie, per $|x| < 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\
&= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n \\
&= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{x}{1-x} + x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} \\
&= x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx).$$

Soluzione: La serie converge banalmente per $x = 0$ e anche per $x \neq 0$, totalmente e uniformemente lontano dall'origine perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|x|\geq\delta} \left| e^{-nx^2} \arctan(nx) \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta^2} < +\infty,$$

ma non è uniforme né totale su $[0, +\infty)$ o $(-\infty, 0]$ perché il termine n-esimo non converge uniformemente a zero in quanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_\pm} \left| e^{-nx^2} \arctan(nx) \right| \geq e^{-n\left(\frac{1}{n}\right)^2} \arctan\left(n\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa)**.**
Determinare il raggio di convergenza e discutere la convergenza sul bordo dell'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log^2 n} x^n.$$

Soluzione: Il raggio di convergenza è

$$\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|n^{\log^2 n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} n^{\frac{\log^2 n}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} e^{\frac{\log^3 n}{n}}} = 1$$

e non c'è convergenza sul bordo perché le serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log^2 n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\log^2 n}$ non sono infinitesime.