AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 3 di martedì 5 novembre 2024

Argomenti: norme, continuità

Esercizio.
Dimostrare che per ogni $x, y > 0$ *e* $p, q > 1$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *vale la disuguaglianza di Young:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Dati due vettori non nulli $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, applicare la disuguaglianza di Young con* $x = \frac{x_j}{\|x\|_p}, y = \frac{y_j}{\|y\|_q}$ *per ottenere la disuguaglianza di Hölder*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dimostrare, a partire dalla disuguaglianza di Young, la disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

ovvero che $\|x\|_p$ *è una norma in* $\mathbb{R}^n$*.*

Esercizio 1.
Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$*, la continuità della funzione*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Esercizio 2.
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan\left(x^2 y^2\right)}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Esercizio 3.
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|y|}\log(1 + |xz|)}{x^2 + y^2 + z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

Esercizio 4 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)\log\left(1+\frac{1}{x^4+y^6}\right)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan(x+y) - \arctan x - \arctan y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$