AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 3 di martedì 5 novembre 2024

Argomenti: norme, continuità

Esercizio.
Dimostrare che per ogni $x, y > 0$ *e* $p, q > 1$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *vale la disuguaglianza di Young:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Dati due vettori non nulli $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, applicare la disuguaglianza di Young con* $x = \frac{x_j}{\|x\|_p}, y = \frac{y_j}{\|y\|_q}$ *per ottenere la disuguaglianza di Hölder*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dimostrare, a partire dalla disuguaglianza di Young, la disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

ovvero che $\|x\|_p$ *è una norma in* $\mathbb{R}^n$*.*

Soluzione: Essendo la funzione $t \mapsto \log t$ continua sull'intera semiretta positiva, avremo

$$\log(xy) = \log x + \log y = \frac{1}{p} \log(x^p) + \frac{1}{q} \log(y^q) \leq \log \left(\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \right),$$

ovvero la disuguaglianza di Young.
Scegliendo poi $x = \frac{|x_j|}{\|x\|_p}, y = \frac{|y_j|}{\|y\|_q}$ e sommando per $j = 1, \dots, n$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x\|_p} \frac{y_j}{\|y\|_p} &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \left(\frac{x_j}{\|x\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{y_j}{\|y\|_q} \right)^q \right) \\
&= \frac{1}{p} \frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}{\|y\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

cioè la disuguaglianza di Hölder (che è banalmente vera nel caso in cui $x=0$ oppure $y=0$, per il quale non può essere applicato questo argomento).
Applicando infine quest'ultima disuguaglianza con esponenti $p, \dfrac{p}{p-1}$ ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p \\
&\le \sum_{j=1}^n |x_j||x_j+y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |y_j||x_j+y_j|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n \left(|x_j+y_j|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n \left(|x_j+y_j|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1},
\end{aligned}$$

ossia la disuguaglianza di Minkowski.

Esercizio 1.
Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è chiaramente continua nei punti diversi dall'origine, ma nell'origine lo è se e solo se $\alpha > \dfrac{3}{2}$ perché per $\alpha \le \dfrac{3}{2}$ abbiamo

$$f\left(y^3, y\right) = \frac{|y|^{4\alpha}}{2y^6} \underset{x\to 0}{\not\to} 0 = f(0,0),$$

mentre per $\alpha > \dfrac{3}{2}$ abbiamo

$$|f(x,y)| \le \frac{\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{6}}}{x^2+y^6} = \left(x^2+y^6\right)^{\frac{2}{3}\alpha - 1} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$$

Esercizio 2.
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan\left(x^2y^2\right)}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è chiaramente continua nei punti diversi dall'origine, ma non lo è nell'origine perché ad esempio

$$f(x,x) = \frac{\arctan\left(x^4\right)}{2x^4} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Esercizio 3.
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|y|}\log(1+|xz|)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è continua dappertutto perché nell'origine vale

$$\begin{aligned}
|f(x,y,z)| &= \frac{\sqrt{|y|}\left(|xz| + O\left(x^2z^2\right)\right)}{x^2+y^2+z^2} \\
&\le \frac{\sqrt{|y|}\left(\frac{x^2+z^2}{2} + O\left(\left(x^2+z^2\right)^2\right)\right)}{x^2+y^2+z^2} \\
&\le \sqrt{|y|}\left(\frac{1}{2} + O\left(x^2+y^2+z^2\right)\right) \\
&\underset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0 \\
&= f(0,0,0).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)\log\left(1+\frac{1}{x^4+y^6}\right)} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è continua lontano dall'origine e anche in $(0,0)$ perché, essendo $|xy| \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$, allora

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2\log\left(1+\frac{1}{x^4+y^6}\right)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 = f(0,0).$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Discutere la continuità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan(x+y)-\arctan x-\arctan y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è continua nell'origine perché

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x+y+O\left((x+y)^3\right)-\left(x+O\left(x^3\right)\right)-\left(y+O\left(y^3\right)\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{O\left((x+y)^3\right)}{x^2+y^2} \\
&= O\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\
&\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \\
&= f(0,0).
\end{aligned}$$