AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 4 di martedì 26 novembre 2024

Argomenti: differenziabilità

Esercizio 1.
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione ha ovviamente derivate parziali ed è differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine; nell'origine le derivate parziali esistono, entrambe nulle, perché $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ e dunque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$, e la funzione è anche differenziabile perché

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^4}\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^4\right)}{\sqrt{x^2+y^4}\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \sqrt{x^2+y^4} \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0. \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione ha derivate parziali ed è differenziabile nei punti diversi dall'origine; nell'origine abbiamo $f(0,y) = 0$, dunque $\partial_y f(0,0) = 0$, e $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 1$, ma la funzione non è differenziabile perché

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

non ha limite in quanto, ad esempio, valutata in (x,x) vale $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Esercizio 3.
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := \sqrt[3]{x^2y^2}.$$

Soluzione: La funzione ha derivate parziali ed è differenziabile quando l'argomento della radice non si annulla, cioè fuori dagli assi coordinati. Nei punti del tipo $(x_0, 0)$, con $x_0 \neq 0$ esiste solo la derivata in x, nulla, perché $f(x, 0) = 0$ ma $f(x_0, y) = \sqrt[3]{x_0^2 y^2}$ non è derivabile in 0, e analogamente $\partial_y f(0, y_0) = 0$ e $\partial_x f(0, y_0)$ non esiste per $y_0 \neq 0$; nell'origine invece le derivate parziali esistono entrambe, nulle, e la funzione è differenziabile perché

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|x|^{\frac{2}{3}}|y|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{6}} \\
&\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cos \dfrac{1}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione: La funzione è differenziabile in tutti i punti diversi da $(0, 0)$, e ha derivate parziali anche in questo punto, entrambe nulle perché $f(0, y) = 0$ e $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \operatorname{segno}(x)\sqrt{|x|}\cos\dfrac{1}{x^4} \underset{x\to 0}{\to} 0$; è anche differenziabile nell'origine perché

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|x|^{\frac{3}{2}}\left|\cos\frac{1}{x^4+y^4}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := |x| + |y| - \arctan\sqrt{x^2+y^2}.$$

Soluzione: La funzione è differenziabile fuori dagli assi, mentre nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ ha derivata in x nulla e non ha derivata in y perché $\dfrac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \dfrac{|x_0| + |y| - \left(|x_0| + O\left(y^2\right)\right)}{y}$, e analogamente in $(0, y_0)$ ha solo derivata in y, nulla; nell'origine invece entrambe le derivate parziali esistono e sono nulle, ma la funzione non è differenziabile perché

$$\begin{aligned}
\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|x| + |y| - \left(\sqrt{x^2+y^2} + O\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 + O\left(x^2+y^2\right),
\end{aligned}$$

che non va a 0 se ad esempio $x = y$.

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Discutere l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy\log\left(1+x^4\right)}{x^8+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Soluzione: La funzione è differenziabile nei punti diversi dall'origine, ha derivate parziali nell'origine perché nulla lungo gli assi ma non è differenziabile perché

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy\log\left(1+x^4\right)}{(x^8+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

va ad esempio a $\dfrac{1}{2}$ se $x = y^4$.