AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 5 di martedì 3 dicembre 2024

Argomenti: punti critici

Esercizio 1.
Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) := x^4 - x^2 \sin y$$

e determinarne l'estremo inferiore e superiore, stabilendo se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Poiché $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 2x\sin y, -x^2\cos y\right)$, i punti critici sono tutta la retta $x = 0$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ per $k \in \mathbb{Z}$; studiando la matrice Hessiana $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2\sin y & -2x\cos y \\ -2x\cos y & x^2 \sin y \end{pmatrix}$, deduciamo che i punti del tipo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ sono di minimo relativo, mentre la matrice è semidefinita negativa su tutto l'asse y. Studiando però il segno della funzione osserviamo che $f(x,0) = 0$, $f(x,y) > 0$ se $\sin y < 0$, $f(x,y) < 0$ se $\sin y > 0$ e x è piccolo e $f(x,y)$ cambia segno in $(0,y)$ se $\sin y = 0$; dunque, se $(2k-1)\pi < y < 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ allora $(0,y)$ è un punto di minimo assoluto, se $2k\pi < y < (2k+1)\pi$ allora $(0,y)$ è un punto di massimo, mentre $(0,k\pi)$ non sono né di massimo né di minimo. Infine, i punti $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ sono di minimo assoluto perché

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = -\frac{1}{4} \leq \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x^4 - x^2 \leq f(x,y),$$

mentre la funzione è illimitata dall'alto perché $f(x,0) \underset{x\to\pm\infty}{\to} \infty$, dunque

$$\sup f = +\infty, \qquad \inf f = \min f = -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 2.
Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) := x^2 e^{-x^4 - 3y^6}$$

e determinarne l'estremo inferiore e superiore, stabilendo se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Poiché $\nabla f(x,y) = e^{-x^4-3y^6}\left(2x - 4x^5, -18x^2y^5\right)$, i punti critici sono $(0,y)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)$; poiché $f(0,y) = 0 \leq f(x,y)$ per ogni x,y, allora tutti i punti del primo tipo sono di minimo assoluto, e in particolare di minimo relativo. Quanto agli altri due, poiché $|f(x,y)| \leq \left(x^2 + y^2\right) e^{-x^4-3y^6} \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\to} 0$, saranno necessariamente dei massimi assoluti, e in particolare

$$\sup f = \max f = \frac{1}{\sqrt{2e}}, \qquad \inf f = \min f = 0.$$

Esercizio 3.
Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) := x^2z^6 - y^2z^6$$

e determinarne l'estremo inferiore e superiore, stabilendo se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Poiché $\nabla f(x,y,z) = z^5\left(2xz, -2xz, 6x^2 - 6y^2\right)$, i punti critici sono $(x,y,0)$ e $(0,0,z)$ al variare di $x,y,z \in \mathbb{R}$; la funzione si annulla in tutti questi punti e cambia segno intorno a ogni $(0,0,z)$, che dunque non sarà di massimo né di minimo, mentre per lo stesso motivo i punti $(x,y,0)$ saranno di minimo locale se $|x| > |y|$, di massimo locale se $|y| < |x|$ e né di massimo né di minimo se $x = \pm y$. Infine, essendo $f(x,0,1) = x^2 \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ e $f(0,y,1) = -y^2 \underset{y\to+\infty}{\to} -\infty$, la funzione non è limitata né dall'alto né dal basso e cioè

$$\sup f = +\infty, \qquad \inf f = -\infty.$$

Esercizio 4 (Assegnato per casa)**.**
Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) := x^6 + y^6 - 3(x+y)^2$$

e determinarne l'estremo inferiore e superiore, stabilendo se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Poiché $\nabla f(x,y) = \left(6x^5 - 6x - 6y, 6y^5 - 6x - 6y\right)$, i punti critici sono $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt[4]{2}, \mp\sqrt[4]{2}\right)$ e, studiando la matrice Hessiana $D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 30x^4 - 6 & -6 \\ -6 & 30y^4 - 6 \end{pmatrix}$, notiamo che gli ultimi due punti sono dei minimi, mentre nell'origine la matrice è semi-definita negativa; poiché però $f(x,-x) = x^6$ ha un minimo stretto nell'origine, il punto non può essere di massimo e dunque non è né massimo né minimo. I minimi sono in realtà minimi assoluti perché all'infinito abbiamo $f(x,y) \geq x^6 + y^6 - 6\left(x^2 + y^2\right) \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\to} +\infty$, e dunque

$$\sup f = +\infty, \qquad \inf f = \min f = -8\sqrt{2}.$$