AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 6 di martedì 10 dicembre 2024

Argomenti: teorema delle contrazioni

Esercizio 1.
Dimostrare che l'equazione

$$\arctan\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)=x$$

ha un'unica soluzione $x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 2.
Dimostrare che il limite della successione definita ricorsivamente come

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$$

è $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{5}$ *per ogni scelta di* $a\in(-1,2]$.

Esercizio 3.
Sia $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *definita da*

$$f(x_1,\dots,x_N):=\left(\sqrt{1+x_1^2},\dots,\sqrt{1+x_N^2}\right).$$

1. *Dimostrare che* $\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$ *per ogni* $x,y\in\mathbb{R}^N$ *con* $x\neq y$.
2. *Dimostrare che* f *non ha punti fissiPhi.*
3. *Spiegare perché ciò non è in contraddizione con il Teorema delle contrazioni.*

Esercizio 4.
Sia $X:=\{f\in C([0,1]):0\le f(x)\le 3,\forall x\in[0,1]\}$ *e* $\Phi:X\to X$ *definita da*

$$(\Phi(f))(x):=2+\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t.$$

1. *Dimostrare che* $X\subset C([0,1])$ *è un sottoinsieme chiuso.*
2. *Dimostrare che* Φ *è una contrazione su* X.
3. *Trovare l'unico punto fisso di* Φ *su* X.

Esercizio 5.
Sia $X := \left\{ f \in C([-\pi,\pi]) : |f(x) \leq \dfrac{1}{2\pi}, \forall x \in [-\pi,\pi] \right\}$ *e* $\Phi : C([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$ *definita da*

$$(\Phi(f))(x) = (2 + \sin x) f(x)^2.$$

1. *Dimostrare che* Φ *è una contrazione su* X.
2. *Trovare l'unico punto fisso di* Φ *su* X.
3. *Dimostrare che* Φ *NON è una contrazione su* $C([-\pi,\pi])$.