AM210 - Analisi matematica 3

Luca Battaglia

Esercitazione 6 di martedì 10 dicembre 2024

Argomenti: teorema delle contrazioni

Esercizio 1.
Dimostrare che l'equazione

$$\arctan\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)=x$$

ha un'unica soluzione $x\in\mathbb{R}$.

Soluzione: L'equazione ha un unica soluzione perché la mappa

$$\Phi: x\mapsto \arctan\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$

è una contrazione su $\mathbb{R}$ in quanto, per ogni $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|\Phi(x)-\Phi(y)|\le\sup_{\mathbb{R}}|\Phi'||x-y|=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{1+\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\right||x-y|\le\frac{|x-y|}{2}.$$

Esercizio 2.
Dimostrare che il limite della successione definita ricorsivamente come

$$\begin{cases} x_0=a\\ x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}+2}\end{cases}$$

è $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{5}$ *per ogni scelta di* $a\in(-1,2]$.

Soluzione: Fissato $a>-1$, la mappa

$$\Phi: x\mapsto 2+\frac{1}{x+2}$$

è una contrazione sul chiuso $[a,+\infty)$ perché $\Phi(x)\ge 2\ge a$ per ogni $x\ge a$ e inoltre

$$|\Phi(x)-\Phi(y)|\le\sup_{\mathbb{R}}|\Phi'||x-y|=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|-\frac{1}{(x+2)^2}\right||x-y|\le\frac{1}{(a+2)^2}|x-y|,$$

con $\dfrac{1}{(a+2)^2}<1$. Dunque, per il Teorema della contrazioni, Φ ha un'unico punto fisso dato dal limite della successione definita come $x_n=\Phi(x_{n-1})=2+\dfrac{1}{x_{n-1}+2}$, che dunque risolverà $x=\Phi(x)$, cioè $x^2-5=0$, la cui unica soluzione in $[-1,+\infty)$ è proprio $x=\sqrt{5}$.

Esercizio 3.
Sia $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *definita da*

$$f(x_1,\dots,x_N):=\left(\sqrt{1+x_1^2},\dots,\sqrt{1+x_N^2}\right).$$

1. *Dimostrare che* $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *con* $x \neq y$.

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|^2 &= \sum_{n=1}^N \left(\sqrt{1 + x_n^2} - \sqrt{1 + y_n^2}\right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^N \left(\frac{x_n^2 - y_n^2}{\sqrt{1 + x_n^2} + \sqrt{1 + y_n^2}}\right)^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2 \left(\frac{|x_n| + |y_n|}{\sqrt{1 + x_n^2} + \sqrt{1 + y_n^2}}\right)^2 \\
&< \sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2 \\
&= \|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

2. *Dimostrare che* f *non ha punti fissi.*

Soluzione: Se f *avesse un punto fisso* x*, allora*

$$\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = 1 + \|x\|^2,$$

che è assurdo.

3. *Spiegare perché ciò non è in contraddizione con il Teorema delle contrazioni.*

Soluzione: Il Teorema delle contraddizioni garantisce l'esistenza di un unico punto fisso assumendo che $\sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < 1$*; in questo caso abbiamo* $\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < 1$ *per ogni* $x \neq y$*, ma la quantità può avvicinarsi arbitrariamente a* 1*: scegliendo ad esempio* $x = (t, 0, \ldots, 0), y = 0$ *avremo* $\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} = \frac{\sqrt{N + t^2}}{|t|} \underset{t \to \pm\infty}{\to} 1$.

Esercizio 4.

Sia $X := \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in [0,1]\}$ *e* $\Phi : X \to X$ *definita da*

$$(\Phi(f))(x) := 2 + \int_0^x t^2 f(t) \mathrm{d}t.$$

1. *Dimostrare che* $X \subset C([0,1])$ *è un sottoinsieme chiuso.*

Soluzione: X *è un sottoinsieme chiuso perché se* $0 \leq f_n(x) \leq 3$ *per ogni* $x \in [0,1]$ *e* $f_n \underset{n \to +\infty}{\to} f$ *uniformemente, allora per ogni* $x \in [0,1]$ *avremo* $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in [0,3]$.

2. *Dimostrare che* Φ *è una contrazione su* X.

Soluzione: Anzitutto $\Phi(X) \subset X$ *perché se* $0 \leq f(x) \leq 3$ *allora* $(\Phi(f))(x) \geq 2 \geq 0$ *e*

$$(\Phi(f))(x) \leq 2 + \int_0^x 3t^2 = 2 + x^3 \leq 3;$$

inoltre,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f) - \Phi(g)\| &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \left|\int_0^x t^2 (f(t) - g(t)) \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \|f - g\| \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x t^2 \mathrm{d}t \\
&= \|f - g\| \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{x^3}{3} \\
&= \frac{\|f - g\|}{3}.
\end{aligned}$$

3. *Trovare l'unico punto fisso di Φ su X.*

Soluzione: *L'unico punto fisso di Φ risolverà l'equazione $f(x) = 2 + \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$, cioè*

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 f(x) \\ f(0) = 2 \end{cases} ;$$

per separazioni di variabili si ottiene

$$\frac{x^3}{3} = \int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \int_2^{f(x)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \log\frac{|f(x)|}{2}$$

cioè $f(x) = 2e^{\frac{x^3}{3}}$.

Esercizio 5.
Sia $X := \left\{ f \in C([-\pi,\pi]) : |f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}, \forall x \in [-\pi,\pi] \right\}$ e $\Phi : C([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$ definita da

$$(\Phi(f))(x) = (2 + \sin x) f(x)^2.$$

1. *Dimostrare che Φ è una contrazione su X.*

Soluzione: *$\Phi(X) \subset X$ perché se $|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}$ per ogni $x \in [-\pi,\pi]$ allora*

$$|(\Phi(f))(x)| \leq |2 + \sin x||f(x)|^2 \leq \frac{3}{4\pi^2} \leq \frac{1}{2\pi};$$

inoltre, Φ è una contrazione perché, per ogni $x \in [-\pi,\pi]$,

$$|(\Phi(f))(x) - (\Phi(g))(x)| = |2+\sin x| \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) \leq |2+\sin x|(|f(x) + |g(x)|)\|f-g\| \leq \frac{3}{\pi}\|f-g\|,$$

dunque $\|\Phi(f) - \Phi(g)\| \leq \frac{3}{\pi}\|f - g\|$ con $\frac{3}{\pi} < 1$.

2. *Trovare l'unico punto fisso di Φ su X.*

Soluzione: *È sufficiente trovare una funzione per cui $(\Phi(f))(x) = f(x)$, che sarà unica per il Teorema delle contrazioni; si vede facilmente che la funzione è $f(x) = 0$ per ogni $x \in [-\pi,\pi]$.*

3. *Dimostrare che Φ NON è una contrazione su $C([-\pi,\pi])$.*

Soluzione: *Φ non è una contrazione su $C([-\pi,\pi])$ perché, oltre a $f(x) = 0$, ammette un altro punto fisso che è dato da $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$.*