Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 1 (26 Settembre 2008)

Successioni di funzioni

1. (a) $f_n(x) = e^{-nx} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; la convergenza non è uniforme su tutto $[0, +\infty)$ perché la funzione limite non è continua, ma c'è convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[\delta, +\infty)$: infatti, essendo le f_n funzioni decrescenti, $\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| = e^{-n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme in quanto $\forall\ n \in \mathbb{N} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, 0] \cup [\delta, +\infty)\ \forall\delta > 0$ perché $\sup\limits_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| = 0$ se $n > \frac{1}{\delta}$.

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(n^3\right)\right| = n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$; la convergenza è uniforme in $[-M, M]\ \forall M > 0$, perché, essendo tutte le f_n funzioni crescenti, raggiungeranno il valore massimo agli estremi dell'intervallo considerato e dunque $\sup\limits_{x\in[-M;M]} |f_n(x)| = |f_n(\pm M)| = \frac{M}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ studiando la derivata di f_n; $f_n'(x) = \frac{x^2+n-2x^2}{\left(x^2+n\right)^2} = \frac{n-x^2}{\left(x^2+n\right)^2}$; notiamo che $f_n'(x) > 0$ se $|x| < \sqrt{n}$ e $f_n'(x) < 0$ se $|x| > \sqrt{n}$ quindi f_n ha un massimo locale in $x = \sqrt{n}$ e un minimo locale in $x = -\sqrt{n}$; siccome f_n è una funzione dispari e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ si ha che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| =$ $= \left|f_n\left(\pm\sqrt{n}\right)\right| = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi la convergenza è uniforme.

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2x}\right| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{n|x|}{n^2|x|} = \frac{1}{n}$ e dunque $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(g) $f_n(x)=\arctan\left(n^2-x\right)\overset{n\to\infty}{\to}\dfrac{\pi}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\arctan\left(n^2-x\right)-\dfrac{\pi}{2}\right|\geq\left|\arctan\left(n^2-\left(n^2+n\right)\right)-\right.$ $\left.-\dfrac{\pi}{2}\right|=\left|\arctan(-n)-\dfrac{\pi}{2}\right|\overset{n\to\infty}{\to}\left|-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right|=\pi$; c'è però convergenza uniforme in tutti gli intervalli del tipo $(-\infty,M]$, perché essendo le f_n funzioni decrescenti si ha $\sup_{x\in(-\infty,M]}\left|\arctan\left(n^2-x\right)-\dfrac{\pi}{2}\right|=\left|\arctan\left(n^2-M\right)-\dfrac{\pi}{2}\right|\overset{n\to\infty}{\to}0$.

(h) $f_n(x)=\displaystyle\int_{-nx^2}^{nx^2}e^{-t^2}dt\overset{n\to\infty}{\to}\begin{cases}\sqrt{\pi} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, che è una funzione discontinua e quindi la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è in ogni $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ perché $\displaystyle\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\int_{-nx^2}^{nx^2}e^{-t^2}dt-\right.$ $\left.-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right|\leq\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\int_{-\infty}^{-nx^2}e^{-t^2}dt+$ $+\displaystyle\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\int_{nx^2}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{-n\delta^2}e^{-t^2}dt+\int_{n\delta^2}^{+\infty}e^{-t^2}dt\overset{n\to\infty}{\to}0$.

(i) $f_n(x)=\sin\left(\pi nx^2\right)e^{-nx^2}\overset{n\to\infty}{\to}0\ \forall x\in\mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme in tutto $\mathbb{R}$ perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sin\left(\pi nx^2\right)e^{-nx^2}\right|\geq$ $\geq\left|\sin\left(\pi n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\overset{n\to\infty}{\not\to}0$; la convergenza è uniforme in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)\ \forall\delta>0$ in quanto $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\sin\left(\pi nx^2\right)e^{-nx^2}\right|\leq\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|e^{-nx^2}\right|=$ $=e^{-n\delta^2}\overset{n\to\infty}{\to}0$.

2. $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|\leq\dfrac{\pi}{2n}\overset{n\to\infty}{\to}0$; $f_n'(x)=\dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{n^2+x^2}\overset{n\to\infty}{\to}$ $\overset{n\to\infty}{\to}0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e anche in questo caso la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{1}{n^2+x^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}\overset{n\to\infty}{\to}0$, dunque sono verificate le ipotesi del teorema di derivazione per successione di funzioni (convergenza puntuale delle f_n e convergenza uniforme delle derivate) e quindi si ha $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=$ $=\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.
$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme perché $g_n'(x)=\dfrac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$, che si annulla in $x=\pm\dfrac{1}{n}$, quindi essendo $\lim_{x\to\pm\infty}g_n(x)=0$ si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)|=\left|g_n\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)\right|=\dfrac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\to}0$; $g_n'(x)=$ $=\dfrac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}\overset{n\to\infty}{\to}\chi_{\{0\}}$ ma la convergenza non è uniforme perché la fun-

zione limite non è continua; $\left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)' = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} g_n'(x) =$
$= \left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)' \Leftrightarrow x \neq 0$.

3. (a) $\dfrac{n \sin x \cos x}{n+x} \overset{n\to\infty}{\to} \sin x \cos x$ e la convergenza è uniforme in quanto
$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\frac{n \sin x \cos x}{n+x} - \sin x \cos x\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\sin x \cos x \left(\frac{n}{x+n} - 1\right)\right| \leq$$
$$\leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\frac{n}{x+n} - 1\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\frac{x}{x+n}\right| \leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\frac{\frac{\pi}{2}}{x+n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0;$$
si può quindi applicare il teorema di passaggio al limite sotto integrale e dunque $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n \sin x \cos x}{n+x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{n \sin x \cos x}{n+x} dx =$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{2} dx = \left[-\frac{\cos^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\dfrac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx \overset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{2+x^2}$ e la convergenza è uniforme su $\left[0, \sqrt{2}\right]$ infatti
$$\sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \left|\frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right| = \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \frac{\left|e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right|}{2+x^2} \leq \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \frac{\left|e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right|}{2} =$$
$= \dfrac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; applicando il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha che $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx =$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [\arctan y]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

(c) $\dfrac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la successione è equidominata su tutto $(0, +\infty)$ perché $\dfrac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \leq xe^{-nx^2} \leq xe^{-x^2}$; la convergenza è uniforme su tutti i compatti contenuti in $(0, +\infty)$ poiché
$\sup_{x\in[\delta,M]} \left|\dfrac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx}\right| \leq \sup_{x\in[\delta,M]} \left|xe^{-nx^2}\right| \leq Me^{-n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi si può applicare il passaggio al limite sotto segno di integrale improprio:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

(d) $\dfrac{\sin(nx)}{n+x} dx \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme in tutto l'intervallo $[0, +\infty)$ perché $\sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{\sin(nx)}{n+x}\right| \leq \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{1}{n+x}\right| \leq \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, ma la successione non è equidominata, quindi non è consentito scambiare i segni di limite e integrale; tuttavia, integrando per parti si trova che

$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n+x}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n(n+x)}\right]_0^{+\infty}-\right.$
$\left.-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=$
$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx$; la funzione $-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}$ tende uniformemente a 0 $\forall x\in[0,+\infty)$, perché $\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq$
$\leq\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq\frac{1}{n^3}\overset{n\to\infty}{\to}0$ e inoltre è equidominata in quanto $\left|\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq\frac{1}{n\left(n+x\right)^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$ e dunque questa volta si può passare al limite sotto il segno di integrale e si trova che
$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n+x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=$
$=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=\int_0^{+\infty}0dx=0.$

4. Sia f'_{n_k} una sottosuccessione di f'_n uniformemente convergente alla funzione g; essendo $f_n(0)$ limitata, ovviamente lo sarà anche $f_{n_k}(0)$ e quindi avrà una sottosuccessione $f_{n_{k_j}}(0)$ convergente ad un certo $l\in\mathbb{R}$. Ovviamente anche $f'_{n_{k_j}}$ convergerà uniformemente a g e quindi $\forall x\in[-1,1]$ si avrà $\lim_{j\to\infty}f_{n_{k_j}}(x)=\lim_{j\to\infty}\left(f_{n_{k_j}}(0)+\int_0^x f'_{n_{k_j}}(t)dt\right)=\lim_{j\to\infty}f_{n_{k_j}}(0)+$
$+\int_0^x\lim_{j\to\infty}f'_{n_{k_j}}(t)dt=l+\int_0^x g(t)dt=:f(x)$, dove lo scambio tra i segni di limite e di integrale è giustificato dall'uniforme convergenza di $f'_{n_{k_j}}$. La convergenza di $f_{n_{k_j}}$ è uniforme, perché $\sup_{x\in[-1,1]}|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|=$
$=\sup_{x\in[-1,1]}\left|f_{n_{k_j}}(0)+\int_0^x f'_{n_{k_j}}(t)dt-l-\int_0^x g(t)dt\right|\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+$
$+\sup_{x\in[-1,1]}\int_0^x|f'_{n_{k_j}}(t)-g(t)|dt\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+\int_{-1}^1|f'_{n_{k_j}}(t)-g(t)|dt\leq$
$\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+2\sup_{x\in[-1,1]}|f'_{n_{k_j}}(x)-g(x)|$, dove entrambi i membri tendono a 0, il primo per la convergenza di $f_{n_{k_j}}(0)$ e il secondo per la convergenza uniforme di $f'_{n_{k_j}}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (3 Ottobre 2008)
Serie di funzioni, serie di potenze

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ è una serie geometrica di ragione e^{-x} e dunque converge $\Leftrightarrow |e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow x > 0$; la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) in $(0, +\infty)$ perché la serie non converge ai bordi di questo intervallo in quanto per $x = 0$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$; c'è però convergenza totale (e quindi anche uniforme) negli intervalli del tipo $[\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} < +\infty$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ è la serie armonica generalizzata e quindi converge in $(-\infty, -1)$; la convergenza non è uniforme (e dunque neanche totale) perché in $x = 1$ la serie diverge, ma è totale (e quindi anche uniforme) sugli intervalli $(-\infty, -1-\delta]$ in quanto $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]} |n^x| =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} < +\infty$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(nx)}{n^2}$ converge su tutto $\mathbb{R}$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \le$
$\le |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$; la convergenza non è uniforme (e neanche totale) su tutto $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0: infatti $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \ge \left|\frac{n^2\sin\left(n^3\right)}{n^2}\right| = \left|\sin\left(n^3\right)\right| \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$, ma è totale (e uniforme) negli intervalli limitati perché
$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x}{n^2}\right| = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n^2x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ perché
$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\cos\left(n^2x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$.

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx)$ vale 0 se $x = 0$ e converge anche per $x \neq 0$ in

quanto $\sum_{n=0}^{\infty}\left|e^{-nx^2}\arctan(nx)\right| \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} < +\infty$; la convergenza non è uniforme (e neanche totale) in $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0, in quanto $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-nx^2}\arctan(nx)\right| \ge$
$\ge \left|e^{-n\left(\frac{1}{n}\right)^2}\arctan\left(n\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$ ma è totale su $(-\infty,-\delta]\cup$ $\cup[\delta,+\infty)$ perché $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|e^{-nx^2}\arctan(nx)| \le$
$\le \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} e^{-nx^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta^2} < +\infty.$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+n^2x^2}$ vale 0 per $x=0$ e converge anche per tutti gli altri valori di x in quanto $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{n+n^2x^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{n^2x^2}\right| = \frac{1}{|x|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$; la convergenza inoltre è totale perché $\frac{d}{dx}\frac{x}{n+n^2x^2} = \frac{n-n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2} =$ $= 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ e perciò, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$,
$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{n+n^2x^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+n^2(\pm\frac{1}{\sqrt{n}})^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{n}} < +\infty.$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^x}{x^n}$ converge $\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ perché, applicando il criterio della radice, si ha che $\sqrt[n]{\left|\frac{n^x}{x^n}\right|} = \frac{1}{|x|}$, e per $x=\pm 1$ le serie valgono rispettivamente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ e divergono entrambe; poiché ai bordi di quest'intervallo la serie diverge, non può esserci convergenza uniforme (né totale); la convergenza non è uniforme neppure in $(-\infty,-1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty)$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0, giacché $\sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty)}\left|\frac{(-1)^n n^x}{x^n}\right| \ge$
$\ge \left|\frac{(-1)^n n^n}{n^n}\right| = 1$, ma è totale in $[-M,-1-\delta]\cup[1+\delta,M]$ $\forall M>0$ perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-M,-1-\delta]\cup[1+\delta,M]}\left|\frac{n^x}{x^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^M}{(1+\delta)^n} < +\infty.$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log(x^{\log n})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log n \log x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\log n}\right)^{\log x} =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$ e dunque è una serie armonica generalizzata e converge $\Leftrightarrow \log x \in (-\infty,-1) \Leftrightarrow x \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$; dato che non c'è convergenza in

$x = \dfrac{1}{e}$, la convergenza non è uniforme su tutto l'intervallo ma è totale in $\left(0, \dfrac{1}{e} - \delta\right]$, in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \left(0, \frac{1}{e} - \delta\right]} \left|n^{\log x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{e} - \delta} < +\infty.$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right| \overset{(y = n^2 t)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^{nx} e^{-y^2} dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: Il raggio di convergenza è $r = \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \dfrac{1}{1} = 1$; studiamo ora il comportamento della serie ai bordi di questo intervallo: per $x = 1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge e per $x = -1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$: utilizzando il criterio del rapporto troviamo che $r =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$= \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{e}{2(2n+1)} = 0$, quindi questa serie converge solo per $x = 0$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\left(3 + (-1)^n\right)^n\right|}} =$

$= \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} 3 + (-1)^n} = \dfrac{1}{4}$; ai bordi dell'intervallo di convergenza la serie diverge perché in entrambe le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{4^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{4^n}$ il termine n-esimo non tende a 0 ma oscilla.

3. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, quindi in particolare c'è convergenza uniforme in $[0, 1]$ e dunque è possibile scambiare serie e integrale: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \cos(\pi n x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[-\pi n \sin(\pi n x)\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutti gli intervalli del tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-\delta)^n < +\infty$; poiché l'intervallo di integrazione è contenuto nell'insieme in cui la serie converge totalmente, si possono scambiare serie e integrale: $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[x^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}2 = 1.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutto $[0, +\infty)$. perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{\log n}{3^n n^x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} < +\infty$, dunque, essendo la serie a termini positivi, ciò è sufficiente per poter scambiare serie e integrali: $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \left[-\frac{1}{n^x \log n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \frac{1}{\log n} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutti gli intervalli del tipo $[\delta, +\infty)$, poiché
$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty,$
ma poiché l'integrale è improprio e la serie non è a termini positivi, ciò non è sufficiente per poter scambiare serie e integrali; tuttavia $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$, e quest'ultima serie è a termini positivi, converge totalmente sui compatti per quanto visto sopra e dunque $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$
$+ \cdots = 1 < +\infty$, quindi la serie di partenza è equidominata e adesso possiamo scambiare serie e integrali: $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \cos(nx)e^{-nx}dx \stackrel{(y=nx)}{=}$$
$$\stackrel{(y=nx)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \int_0^{+\infty} \cos y e^{-y}dy = \int_0^{+\infty} \cos y e^{-y}dy =$$
$$= [\sin y e^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \sin y e^{-y}dy = 0 + [-\cos y e^{-y}]_0^{+\infty} -$$
$$- \int_0^{+\infty} \cos y e^{-y}dy \Rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \cos y e^{-y}dy = \frac{[-\cos y e^{-y}]_0^{+\infty}}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. $f(x)$ è ben definita perché $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\arctan(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$; tale funzione è continua perché la successione delle somme parziali $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ è una successione di funzioni continue (in quanto somme finite di funzioni continue) e inoltre, essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\arctan(nx)}{n^2} \right| \leq$ $\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, la convergenza è totale e quindi anche uniforme, e dunque la continuità viene mantenuta passando al limite; per quanto riguarda la derivabilità di f, la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,(1+n^2x^2)}$ converge uniformemente su ogni insieme del tipo $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ e quindi, per il teorema di derivazione per serie di funzioni, f è derivabile in ogni $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ e dunque anche in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; in 0 invece la serie della derivata non converge e quindi la derivabilità va verificata "a mano": $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2x} \geq$ $\geq \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2x} = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(nx)}{n^2x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2\,(1+n^2x^2)} =$ $= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq M \ \forall M > 0$, quindi $f'(0) = +\infty$ e cioè f non è derivabile in 0.

5. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: la convergenza è uniforme perché è una serie di funzioni costanti, ma non è assoluta (e quindi neanche totale) perché $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.
   (b) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella assoluta.
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx)$. (La convergenza di questa serie è stata discussa al punto f del primo esercizio).

(d) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella uniforme.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$: fissato x, la serie converge puntualmente ma non assolutamente; inoltre, la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=N}^{N+p} \frac{(-1)^n x}{n} \right| \geq \left| \sum_{n=N}^{N+p} \frac{(-1)^n n}{n} \right| = \left| \sum_{n=N}^{N+p} (-1)^n \right| \overset{n\to\infty}{\not\to}$ $\overset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}$: fissato x, la serie è costituita da un unico termine e quindi la convergenza è puntuale e assoluta; inoltre, è uniforme, perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} =$ $\displaystyle= \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; tuttavia, non c'è convergenza totale in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (10 Ottobre 2008)
Sviluppi in serie di Taylor, serie di potenze

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^5 x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n^5|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5}} = = \frac{1}{1} = 1$; per $x = 1$ abbiamo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^5$ che non converge e per $x = -1$ abbiamo $\sum_{n=0}^{\infty} n^5$, che diverge.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{1}{0} = \infty$, quindi la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$: utilizzando il criterio del rapporto abbiamo che $r = = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^n} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, quindi la serie converge solo per $x = 0$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2} x^n$: sappiamo che $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}\right|}} = 1$; per $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}$ diverge (confronto con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$) mentre per $x = -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}$ converge per il criterio di Leibniz (infatti, $\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}$ che è decrescente in quanto somma di successioni decrescenti).

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$: notiamo innanzi tutto che la quantità $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ vale 0 per n pari, vale 1 per $n \equiv 1 \bmod 4$ e -1 per $n \equiv 3 \bmod 4$; di conseguenza avremo $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}} = \frac{1}{1} = 1$; infine, ai bordi del raggio di convergenza la serie non converge perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ non soddisfano la condizione necessaria che l'n-esimo termine tenda a 0.

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} - 3\right)^n$: posto $y = \frac{x}{2} - 3$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ che ovviamente converge $\Leftrightarrow -1 < y < 1$; la serie di partenza dunque converge

$\Leftrightarrow -1 < \dfrac{x}{2} - 3 < 1 \Leftrightarrow 4 < x < 8.$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$: posto $y = \dfrac{x^2}{3}$, la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$, che converge $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 \le y \le 1$, cioè $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\log n} x^n$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^{\log n}|}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{\log n}{n}}} =$ $= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\log n \frac{\log n}{n}}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\log n}{n}\log n}} =$ $= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\log^2 n}{n}}} = \dfrac{1}{e^0} = 1$; per $x = \pm 1$ abbiamo le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\log n}$ che non convergono perchè il termine n-esimo non tende a 0.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2^{3n} + 3^{2n}\right) x^n$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n\, 2^{3n} + 3^{2n}|}} =$ $= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n \left(\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1\right)}} = \dfrac{1}{9}$; ai bordi di questo intervallo abbiamo le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} + 3^{2n}}{9^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n} + 3^{2n}}{9^n}$ che non convergono perché il termine n-esimo non tende a 0.

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(4x)^n}$: ponendo $y = \dfrac{1}{4x}$, abbiamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} y^n$; applicando il criterio del rapporto, abbiamo che $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} =$ $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$; il raggio di convergenza è dunque $\dfrac{1}{e}$; per $x = \dfrac{e}{4}$ la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$ che per la formula di Stirling si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ che diverge; infine, per $x = -\dfrac{e}{4}$ la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n! e^n}$ che converge per Leibniz perché il termine n-esimo, comportandosi come $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, tende a 0, e inoltre è decrescente perché il rapporto tra il termine $n+1$-esimo e quello n-esimo è pari a $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \dfrac{e^n n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e(n+1)n^n} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{e}{e} = 1.$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt$: notiamo che, per il teorema della media integrale, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{{c_n}^2}$ per un opportuno $\sqrt{n} \leq$ $\leq c_n \leq \sqrt{n}+1$; quindi si ha che $e^n \leq e^{{c_n}^2} \leq e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}}$, ma $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} = e$ e $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}} = \limsup_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^2} = e$ e quindi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}} = e$. Dunque $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}}} = \frac{1}{e}$; sul bordo dell'intervallo di convergenza, per $x = \frac{1}{e}$ la serie vale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2} dt}{e^n}$, ma essendo $\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2} dt \geq e^n$, questa quantità è maggiore di $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ e dunque diverge, mentre in $x = -\frac{1}{e}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2} dt}{e^n}$ che non converge perché ha termine n-esimo, in modulo, maggiore di 1.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$: utilizzando il criterio del rapporto abbiamo che $r = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1-$ $-\frac{1}{(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1$; per $x = \pm 1$ si hanno le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ che non convergono perchè il termine n-esimo non tende a 0.

2. (a) $f(x) = \log\left(1-x^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\left(x^3\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{3n+3}}{n+1}$.

   (b) $f(x) = \frac{1}{x+10} = \frac{1}{10} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{10}\right)} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{10^{n+1}}$.

   (c) $f(x) = e^{x^2-1} = \frac{e^{x^2}}{e} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

   (d) $f(x) = \frac{\arctan\left(x^5\right)}{x^5} = \frac{1}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x^5\right)^{2n+1}}{2n+1} =$ $= \frac{1}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{10n+5}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{10n}}{2n+1}$.

3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x \cosh x$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!2^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} -$
$\displaystyle -\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} =$
$\displaystyle = \frac{x}{(1-x)^2}$, ove il terzo passaggio è giustificato dal fatto che nelle serie di potenze si può derivare termine a termine.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} dt = \int_0^x dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} =$
$\displaystyle = \int_0^x \log(t+1)dt = [(t+1)\log(t+1) - t - 1]_0^x = (x+1)\log(x+1) - x,$
ove il secondo passaggio è giustificato dal fatto che nelle serie di potenze si può integrare termine a termine.

4. (a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} =$
$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx =$
$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1 =$
$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 4 (17 Ottobre 2008)
Funzioni analitiche, variabili complesse, serie di Fourier

1. (a) $\log(-4) = \log|-4| + i(\arg(-4) + 2k\pi) = \log 4 + \pi i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\log(1 + \sqrt{3}i) = \log|1 + \sqrt{3}i| + i(\arg(1 + \sqrt{3}i) + 2k\pi) = \log 2 + \frac{\pi i}{3} +$ $+2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (c) $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\pi i)^n}{n!}\right) = \log(\exp(3\pi i) - 1) = \log(-2) = \log 2 + \pi i +$ $+2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (d) $\sqrt[3]{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{3}} = \exp\left(\frac{1}{3}\log(1+i)\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} +\right.\right.$ $\left.\left.+2k\pi i\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\log\sqrt{2}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{12} + \frac{2}{3}k\pi i\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} +\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right), k \in \mathbb{Z}$.

   (e) $(3i)^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2}\log(3i)\right) = \exp\left(\sqrt{2}\left(\log 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\right)\right) =$ $= \exp\left(\sqrt{2}\log 3\right)\exp\left(\frac{\sqrt{2}\pi i}{2} + 2\sqrt{2}k\pi i\right) = 3^{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} +\right.\right.$ $\left.\left.+2\sqrt{2}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 2\sqrt{2}k\pi\right)\right), k \in \mathbb{Z}$.

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1-i}{1+i}} = i^{-i} = \exp(-i\log i) = \exp\left(-i\left(\log 1 + \frac{\pi i}{2} +\right.\right.$ $\left.\left.+\ 2k\pi i\right)\right) = \exp(-i\log 1)\exp\left(-i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$: utilizzando il criterio del rapporto troviamo che $r =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, quindi la serie converge solamente in $z = 0$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n + i\sin n) z^n$ ha come raggio di convergenza $r =$ $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos n + i\sin n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$: sul bordo di questo disco la serie non converge perché il termine n-esimo ha modulo 1: infatti, $|(\cos n + i\sin n)z^n| = |\cos n + i\sin n| \cdot |z|^n =$ $= 1 \cdot |1|^n = 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2(2i)^n}$: $r=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2(2i)^n}\right|}}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2 2^n}=2$; sul bordo del disco la serie converge assolutamente perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2(2i)^n}\right|=$ $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{n!}z^n$: $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(1+2i)^n}{n!}}{\frac{(1+2i)^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+2i)^n\,(n+1)!}{n!\,(1+2i)^{n+1}}\right|=$ $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|1+2i|}=\infty$, quindi la serie converge su tutto $\mathbb{C}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cosh(in)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\cos nz^n$: $r=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos n|}}=1$; ai bordi del dominio la serie non converge perché il termine n-esimo non tende a 0.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\arctan n)^n z^n$: $r=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\arctan n|^n}}=$ $=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}|\arctan n|}=\dfrac{2}{\pi}$; sul bordo del disco di convergenza la serie diverge, perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, $|(\arctan n)^n z^n|=\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^n=e^{n\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)}\overset{n\to\infty}{\to}e^{-\frac{2}{\pi}}$, perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}=$ $\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\right)+\log(\arctan x)}{\frac{1}{x}}$; per la regola di de l'Hôpital, questo limite è uguale a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{(x^2+1)\arctan x}=$ $\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\arctan x}=-\frac{2}{\pi}.$

3. (a) $f(x)=\sin x\cos x=\dfrac{\sin(2x)}{2}=\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}$ è un polinomio trigonometrico e dunque questo è il suo sviluppo in serie di Fourier.

(b) $f(x)=x^2$: calcoliamo i coefficienti di Fourier: $\hat{f}_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=$ $=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi^3}{3}\right)=\dfrac{\pi^2}{3}$, mentre per $n\neq 0$ si ha $\hat{f}_n=$ $\displaystyle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{x^2e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx\right)=$ $\displaystyle=\frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{\pi^2e^{-in\pi}-\pi^2e^{in\pi}}{-in}\right)-\left[\frac{2xe^{-inx}}{i^2n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{i^2n^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)=$ $\displaystyle=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi e^{-in\pi}+2\pi e^{in\pi}}{-n^2}\right)=\frac{2e^{in\pi}}{n^2}$; notiamo che $e^{in\pi}=\cos n\pi+$

$+i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$, dunque $\hat{f}_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2}$; lo sviluppo in serie di Fourier diventa quindi $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$. Sostituendo $x = 0$ in questa espressione otteniamo che $0 = \dfrac{\pi}{3} +$
$+2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + 2\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} +$
$+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} =$
$= -\dfrac{\pi^2}{12}$. Sostituendo $x = \pi$ invece si ottiene $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} +$
$+2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{in\pi} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} +$
$+2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$

(c) $f(x) = e^x$: calcoliamo i coefficienti di Fourier: $\hat{f}_n =$
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)} dx = \left[\frac{e^{x(1-in)}}{2\pi(1-in)}\right]_{-\pi}^{\pi} =$
$= \dfrac{e^{\pi - in\pi} - e^{-\pi + in\pi}}{2\pi(1-in)} = \dfrac{e^{in\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{2\pi(1-in)} \dfrac{1+in}{1+in} = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left(\dfrac{(-1)^n}{1+n^2} +\right.$
$\left. +i\dfrac{(-1)^n n}{1+n^2}\right) \Rightarrow e^x = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} + i\frac{(-1)^n n}{1+n^2}\right) e^{inx}.$

4. Come nei reali, anche nei complessi si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$; riscrivendo il numero z in forma polare, l'identità diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (r\exp(ix))^n =$
$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(inx)$, e applicando le Formule di Eulero $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(inx) =$
$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \frac{1}{1 - r(\cos x + i\sin x)} =$
$= \dfrac{1}{1 - r\cos x - ir\sin x} \dfrac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - r\cos x + ir\sin x} =$
$= \dfrac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2\sin^2 x} = \dfrac{1 - r\cos x}{r^2 - 2r\cos x + 1} +$
$+i\dfrac{r\sin x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$. Uguagliando i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria, si trova che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos(nx) = \frac{1 - r\cos x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n\sin(nx) = \frac{r\sin x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$.

5. Supponiamo che f non sia la funzione identicamente nulla, ovvero che

$\exists x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) \neq 0$; allora, per il teorema della permanenza del segno, per un certo $\epsilon > 0$ si avrà $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; allora, essendo $f(x)g(x) = 0$, dovrà essere $g(x) = 0$ $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, ma allora, essendo g una funzione analitica, se è nulla nell'intervallo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ lo sarà anche in tutto (a,b). Un controesempio, con funzioni C^∞ ma non analitiche, è il seguente: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 5 (24 Ottobre 2008)
Limiti in più variabili, ripasso

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}=0$; infatti, $\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right| =$
$= x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1$, perché, ponendo $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, si ha $\lim_{\rho\to(0,0)} \frac{\sin\left(\rho^2\right)}{\rho^2}=1.$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, perché $\left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$= \frac{\left(x^2\right)^{\frac12}\left(y^2\right)^{\frac12}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (d) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}=0$: $\left|\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}\right| \le \frac{1}{x^2+y^4} \le \frac{1}{x^2+y^2-\frac14}$, perché $y^4-y^2+\frac14=\left(y^2-\frac12\right)^2 \ge 0$, e infine $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{1}{x^2+y^2-\frac14} =$
$= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2-\frac14}=0.$

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+\left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2}=1$:
$\left|\frac{x^2y+\left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2}-1\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}+\cos\left(x^4+y^7\right)-1\right| \le$
$\le \frac{x^2|y|}{x^2+y^2}+\left|\cos\left(x^4+y^7\right)-1\right| \le \frac{\left(x^2+y^2\right)|y|}{x^2+y^2}+\left|\cos\left(x^4+y^7\right)-1\right| =$
$= |y|+\left|\cos\left(x^4+y^7\right)-1\right| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^2}=0$; $\left|\frac{x^2y^3}{x^6+y^2}\right| = \frac{\left(x^6\right)^{\frac13}\left(y^4\right)^{\frac34}}{x^6+y^4} \le$
$\le \frac{\left(x^6+y^4\right)^{\frac13}\left(x^6+y^4\right)^{\frac34}}{x^6+y^4} = \left(x^6+y^4\right)^{\frac13+\frac34-1} = \left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$

2. (a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, quindi ci limiteremo a studiare la continuità di f nell'origine: la funzione è continua anche in questo punto, perché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| = \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \le \frac{x^2\left(x^4+y^2\right)}{(x^4+y^2)} = \\ = x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, ma non lo è nell'origine perché, muovendosi lungo la parabola $x=y^2$ la funzione vale $f\left(y^2,y\right)=\dfrac{y^4}{2y^4}=\dfrac{1}{2}\overset{y\to0}{\not\to}0$.

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ non è continua nell'origine perché lungo la retta $y=x$ la funzione vale $f(x,x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2}\overset{x\to0}{\to}\dfrac{1}{2}$.

(d) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \dfrac{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} \le$

$$\le \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} = \\ = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0.$$

3. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è continua $\Leftrightarrow \alpha>\dfrac{3}{2}$: se $\alpha\le\dfrac{3}{2}$, lungo la curva $x=y^3$ la funzione vale $f(y^3,y)=\dfrac{|y|^{4\alpha}}{2y^6}=\dfrac{|y|^{4\alpha-6}}{2}\overset{y\to0}{\not\to}0$; se invece $\alpha>\dfrac{3}{2}$, $|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6}=\dfrac{\left(x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(y^6\right)^{\frac{\alpha}{6}}}{x^2+y^6}\le$

$$\le \frac{\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{6}}}{x^2+y^6} = \left(x^2+y^6\right)^{\frac{2}{3}\alpha-1} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$$

4. Innanzi tutto, $f_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt$ è definita solo per $x\ge0$ perché altrimenti l'integranda conterrebbe la radice di una quantità negativa. Effettuando, come suggerito dal testo, un cambio di variabile all'interno dell'integrale, abbiamo $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt \overset{(y=nt)}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{\frac{y}{n}+x}}\frac{dy}{n} =$ $= \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y+nx}}dy$; a questo punto, integriamo per parti e troviamo $f_n(x)=\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y+nx}}dy=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left[\frac{\sin y}{\sqrt{y+nx}}\right]_0^{+\infty}+\right.$ $\displaystyle\left.\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy\right)=\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy$. Se $x\neq0$ la funzione integranda converge uniformemente perché $\displaystyle\sup_{y\in(0,+\infty)}\left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right|\le$

$\leq \sup_{y\in(0,+\infty)} \dfrac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ed è anche equidominata perché $\left|\dfrac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq$
$\leq \dfrac{y}{y^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ sull'intervallo $(0,1)$ e $\left|\dfrac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \dfrac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$ in $[1,+\infty)$, e entrambe queste funzioni sono integrabili in senso improprio nei rispettivi intervalli; dunque si può passare al limite sotto integrale e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$
$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}} dy = \int_0^{+\infty} 0 dy = 0$; per $x=0$ invece si ha
$\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(0)| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left| \left[\dfrac{\sin y}{\sqrt{y}}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{3}{2}}} dy \right| \leq$
$\lim\limits_{n\to\infty} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{3}{2}}} dy + \int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{3}{2}}} dy\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} +\right.$
$\left.+ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} [2\sqrt{y}]_0^1 + \left[-\frac{2}{\sqrt{y}}\right]_1^{+\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, e dunque anche $f_n(0) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. La convergenza è uniforme perché, per quanto è stato visto in precedenza, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}} dy\right| \leq$
$\leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| dy \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} + \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}\right) =$
$= \dfrac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

5. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(2^n+3^n)}$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n(2^n+3^n)}\right|}} =$
$= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n\left(\frac{2}{3}^n+1\right)n}}} = 3\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}^n+1\right)n}}} = 3$; per $x=3$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(2^n+3^n)}$ diverge per il confronto con la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ma in $x=-3$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n}(2^n+3^n)}$ converge per il criterio di Leibniz.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$: applichiamo il criterio del rapporto: $r =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} \left(\dfrac{(n+1)!}{n!}\right)^2 =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{4}$; per determinare il comportamento al bordo, ricordiamo la formula di Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$: dunque si avrà che $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} \approx \dfrac{\sqrt{4\pi n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} 4^n} = \dfrac{2^{2n} n^{2n}}{\sqrt{\pi n} n^{2n} 4^n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$; dunque, per

$x = \frac{1}{4}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 4^n}$ diverge per il criterio del confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ mentre in $x = -\frac{1}{4}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 4^n}$ converge per Leibniz.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - i^n)^n\, z^n$: $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 - i^n|^n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |1 - i^n|} = \frac{1}{2}$; ai bordi dell'intervallo non c'è convergenza perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, se $|z| = \frac{1}{2}$, $|(1 - i^n)^n\, z^n| = 1$ se $n \equiv 2 \mod 4$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 6 (31 Ottobre 2008)
Limiti in più variabili, ripasso

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, perché $\left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$= y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4} = 0$, perché $\left|\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}\right| \le \frac{\left|x^3\right|}{x^2+y^4} \le$
$\le \frac{|x|\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4} = |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ non esiste perché lungo la direzione $(x,0,0)$ questa quantità è sempre nulla, mentre lungo la curva $\left(x,x^2,x\right)$ vale $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{x^4+2x^2}} \overset{x\to 0}{\to} +\infty$.

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|xy|)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è chiaramente continua al di fuori dell'origine; tuttavia, nell'origine è discontinua, perché
$f(x,x) = \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} & \text{se } x\neq y \\ e^{-xy} & \text{se } x=y \end{cases}$ è ovviamente continua all'infuori della bisettrice del primo e terzo quadrante; tuttavia, la funzione è continua anche lungo questa retta, perché, per il teorema della media integrale, si ha $\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} = e^{-z^2}$ per un opportuno $z\in[x,y]$, quindi
$\left|\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} - e^{-xy}\right| = \left|e^{-z^2} - e^{-xy}\right| \overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to} \left|e^{-x_0^2} - e^{-x_0^2}\right| = 0$.

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^3}{x^6+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{x^2yz^3}{x^6+y^2+z^4}\right| = \frac{\left(x^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^2+z^4} \le$
$\le \frac{\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^2+z^4} =$
$= \left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{7}{12}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0$.

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(7x^8+2y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è continua $\Leftrightarrow \alpha<\dfrac{3}{8}$: se $\alpha\geq\dfrac{3}{8}$, lungo la curva $y=x^2$ la funzione vale $f(x,x^2)=\dfrac{x^3}{9|x|^{8\alpha}}=\dfrac{|x|^{3-8\alpha}}{9}\overset{x\to 0}{\not\to}0$; se invece $\alpha<\dfrac{3}{8}$, $|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|xy|}{(7x^8+2y^4)^\alpha}=\dfrac{\left(x^8\right)^{\frac{1}{8}}\left(y^4\right)^{\frac{1}{4}}}{(7x^8+2y^4)^\alpha}\leq$
$\leq\dfrac{\left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{1}{8}}\left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{1}{4}}}{(7x^8+2y^4)^\alpha}=\left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{3}{8}-\alpha}\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0.$

4. (a) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n^2}\overset{n\to\infty}{\to}0\ \forall x\in[-1,1]$ e la convergenza è uniforme in quanto $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}\overset{n\to\infty}{\to}0.$

   (b) $f_n(x)=\cos^{2n}(\pi x)\overset{n\to\infty}{\to}\chi_{\mathbb{Z}}$, perché $\cos^2(\pi x)=1\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$, e quindi la convergenza non è uniforme perché la funzione limite non è continua; la convergenza è tuttavia uniforme negli intervalli del tipo $[n+\delta,n+1-\delta]$ poiché $\sup\limits_{[n+\delta,n+1-\delta]}|f_n(x)|=f_n(n+\delta)=$
   $=f_n(n+1-\delta)=\cos^{2n}(\pi\delta)\overset{n\to\infty}{\to}0.$

   (c) $f_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}\overset{n\to\infty}{\to}\chi_{\{0\}}$, che non è continua in 0 e quindi la convergenza non è uniforme; tuttavia, $\forall\delta>0$ si ha che $\sup\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\dfrac{\sin(nx)}{nx}\right|\leq\sup\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\dfrac{1}{nx}\right|\leq\dfrac{1}{n\delta}\overset{n\to\infty}{\to}0$ e quindi la convergenza è uniforme in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$.

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(xn)^n}{x^n+n^n}$ converge in $(-1,1)$ perché, applicando il criterio della radice, si ha che $\sqrt[n]{\left|\dfrac{(xn)^n}{x^n+n^n}\right|}=|x|$ e in $x=\pm1$ la serie vale rispettivamente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{1+n^n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{(-1)^n+n^n}$ che divergono entrambe; la convergenza non è uniforme perché ai bordi del dominio la serie diverge, ma totale su $[-1+\delta,1-\delta]$ in quanto
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sup\limits_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}\left|\dfrac{(xn)^n}{x^n+n^n}\right|\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sup\limits_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}|x^n|\dfrac{n^n}{n^n-1}\leq$
   $\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\delta^n<+\infty.$

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^n x$ converge $\Leftrightarrow -1<\cos x<1\Leftrightarrow x\neq k\pi\ \forall k\in\mathbb{Z}$; la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) sugli intervalli $(k\pi,(k+1)\pi)$ perché la serie non converge sul bordo dell'intervallo, ma è totale (e quindi anche uniforme) sugli intervalli $[k\pi+\delta,(k+$

$+1)\pi-\delta], \forall\delta>0$ perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{[k\pi+\delta,(k+1)\pi-\delta]} |\cos^n x| =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n(k\pi+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \delta = \frac{1}{1-\cos\delta} < +\infty.$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log n \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} =$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}$ e dunque è una serie armonica generalizzata e converge $\Leftrightarrow \log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) < -1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2-1}{x^2+1} <$
$< \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow 0 < x^2-1 < \dfrac{x^2}{e} + \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2\left(1-\frac{1}{e}\right) < 1+\frac{1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 < \frac{1+\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ |x| < \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}, -1\right) \cup$
$\cup \left(1, \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\right)$; poiché per $x = \pm\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}$ la serie diverge (armonica di esponente 1), la convergenza non può essere né uniforme né totale, ma è totale e uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-a,-1)\cup(1,a]$ $\forall a \in \left(1, \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\right)$, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-a,-1)\cup(1,a]} \left| n^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} \right| =$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)} < +\infty.$

6. Notiamo che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = i \Leftrightarrow z$ è una delle determinazioni del logaritmo di i, cioè $z = \log|i| + i\,(\arg i + 2k\pi i) = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 7 (7 NOVEMBRE 2008)

LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

1. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è sicuramente continua al di fuori dell'origine, e inoltre lo è anche nell'origine perchè $\left|\frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq$
$\leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(x^2+y^2\right)|y|}{x^2+y^2} + \frac{|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} =$
$= |y| + |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è continua perché
$\left|\frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6}\right| \leq \frac{|x|^3y^2}{x^4+y^6} = \frac{\left(x^4\right)^{\frac{3}{4}}\left(y^6\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4+y^6} \leq$
$\leq \frac{\left(x^4+y^6\right)^{\frac{3}{4}}\left(x^4+y^6\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4+y^6} = \left(x^4+y^6\right)^{\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è continua nell'origine: infatti, fissato $\alpha > 0$ esiste un opportuno c_α tale che $|\log x| < \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$, dunque $\left|\frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{c_\alpha\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} =$
$= c_\alpha\left(x^2+y^2\right)^{1-\alpha} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2\pi} & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è ovviamente continua al di fuori dell'asse delle y, quindi ci limitiamo a studiare il comportamento della funzione su questo asse: nei punti del tipo $(0,y_0)$ con $y_0 > 0$, avvicinandoci da sinistra lungo la retta orizzontale abbiamo
$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+y_0^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y_0}{x}\right)} = +\infty$ e quindi la funzione non è continua; nei punti $(0,y_0)$ con $y_0 < 0$, se ci avviciniamo da destra lungo la retta orizzontale abbiamo $\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+y_0^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y_0}{x}\right)} = +\infty$, quindi la funzione non è continua neanche in questi punti, e non è continua neanche nell'origine perché, muovendosi lungo la curva $x = y^3$ abbiamo $\lim_{y\to0} \frac{y^6+y^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to0} \frac{y^4+1}{2} \frac{y^2}{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{y^2}\right)} =$
$= \frac{1}{2}\lim_{z\to0} \frac{z}{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{z\to0} \frac{1}{\frac{1}{1+z^2}} = \frac{1}{2}.$

(e) $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x\sqrt{|yz|}}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ non è continua perchè $f(x,x,x)=\dfrac{x|x|}{3x^2}\overset{x\to 0}{\not\to}0$.

2. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}e^{-t^2}dt$ è ben definita $\forall x\in\mathbb{R}$ perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}e^{-t^2}dt\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$; inoltre, la convergenza della serie è totale (e quindi anche uniforme) su tutto $\mathbb{R}$, perchè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}e^{-t^2}dt\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, e dunque la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, perché le somme parziali sono continue (in quanto somme finite di funzioni continue) e la convergenza uniforme mantiene la continuità; per quanto riguarda la derivabilità, notiamo innanzi tutto che $\displaystyle\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}e^{-t^2}dt\overset{\left(y=\frac{t}{n}\right)}{=}\frac{1}{n}\int_0^{x}e^{-n^2t^2}dt$, e dunque la serie delle derivate è $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n}$: questa serie converge totalmente in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{e^{-n^2x^2}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\delta^2}}{n}<$ $<+\infty$ e dunque, per il teorema di derivazione per serie di funzioni, f è derivabile $\forall x\neq 0$; in $x=0$ la funzione non è derivabile perché $f'(0)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx}\int_0^x e^{-n^2t^2}dt\geq$$

$$\geq\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{nx}\int_0^x e^{-n^2t^2}dt=\sum_{n=1}^{N}\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx}\int_0^x e^{-n^2t^2}dt=\sum_{n=1}^{N}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-n^2x^2}}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>M\ \forall M>0.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}\right|\leq\frac{1}{|x|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}<+\infty$, e per $\alpha<-1$ la serie converge anche in $x=0$ perché nell'origine la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^\alpha$; la convergenza è totale in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}\right|=\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\delta^2}<+\infty$, mentre in $(-\delta,\delta)$ la convergenza è uniforme e totale $\Leftrightarrow\alpha<-1$, perché per $\alpha<-1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{(-\delta,\delta)}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\delta,\delta)}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x}\right|\leq$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(-\delta,\delta)} \left|\frac{n^\alpha x}{x}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha < +\infty$, mentre per $\alpha \geq 1$ la convergenza non può essere uniforme né totale in quanto non c'è convergenza nell'estremo $x = 0$.

Grazie alla convergenza uniforme su $[\delta, +\infty)$ è possibile scambiare serie e integrali in entrambi i casi, perché la serie è a termini positivi $\forall x > 0$, dunque $\int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx \leq$
$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+n^2x^2)} \overset{(t=nx)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{\frac{dt}{n}}{\frac{x}{n}(1+t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \leq$
$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{+\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < +\infty \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$; se $\alpha < 0$ inoltre $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx \leq$
$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx \overset{(t=nx)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^n \frac{n^{\alpha-1}t}{\frac{t}{n}(1+t^2)}\frac{dt}{n} \leq$
$\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-1}$, mentre se $\alpha \geq 0$ abbiamo che
$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx \geq$
$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)} \overset{(t=nx)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \frac{\left|\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)\right|}{\frac{t}{n}(1+t^2)}\frac{dt}{n} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{n^{1-\alpha}} \frac{\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)}{t(1+t^2)}dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \inf_{x\in(0,n^{1-\alpha}]} \frac{\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)}{n^{\alpha-1}t} \int_0^{n^{1-\alpha}} \frac{dt}{1+t^2} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \inf_{x\in(0,1]} \frac{\sin x}{x} [\arctan t]_0^{n^{1-\alpha}} = \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \arctan\left(n^{1-\alpha}\right)$, che diverge perché se $\alpha \geq 1$ allora $n^{1-\alpha} \leq 1$ e dunque $\arctan\left(n^{1-\alpha}\right) \geq \frac{n^{1-\alpha}}{2} = \frac{2}{n^{\alpha-1}}$, mentre se $0 < \alpha < 1$ si ha $n^{1-\alpha} \geq 1$ e dunque per la monotonia dell'arcotangente $\arctan\left(n^{1-\alpha}\right) \geq \frac{\pi}{4}$ e otteniamo $\frac{\pi \sin 1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}$ che diverge.

4. Se f è continua e strettamente positiva, allora $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ è una funzione ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}^n$; inoltre, $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = +\infty$, quindi, essendo g continua e coerciva su $\mathbb{R}^n$, che è un insieme chiuso, avrà un punto di minimo assoluto, ovvero $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $g(x) \geq g(x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$; ma allora, essendo $\frac{1}{f(x)} = g(x) \geq g(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}$, si avrà $f(x) \leq f(x_0)$, quindi x_0 è un punto di massimo assoluto.

   Nel nostro caso, $f(x,y)$ è continua e $0 < \frac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan(1+y^6)} \leq$
   $\leq \frac{1}{1+x^2+y^2} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} 0$ e quindi verifica tutte le ipotesi; inoltre,

$$\frac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan\left(1+y^6\right)} \le \frac{\sin 1}{1+\frac{\pi}{4}} = f(0,0), \text{ quindi } \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$$
$$= \frac{\sin 1}{1+\frac{\pi}{4}}.$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 8 (21 Novembre 2008)

Derivazione in più variabili

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile all'infuori dell'origine; nell'origine la funzione ammette derivate parziali entrambe identicamente nulle, perché $f(x,0)=0\ \forall x$ e $f(0,y)=0\ \forall y$, dunque $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$; inoltre, f è differenziabile (e quindi dotata di derivate direzionali) nell'origine in quanto $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$
$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2\sqrt{k^2}}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq$
$\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sqrt{h^4+k^2}}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0.$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ non è parzialmente derivabile (e dunque neanche differenziabile) nell'origine perché $f(x,0)=\frac{1}{x}$ e $f(0,y)=\frac{1}{y}$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}=+\infty$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=$
$=\lim_{k\to0}\frac{1}{k^2}=+\infty$; la funzione non ha neppure le derivate direzionali perché
$\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t(h+k)}{t^3\left(h^2+k^2\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{h+k}{t^2\left(h^2+k^2\right)}=$
$=\begin{cases}+\infty & \text{se } h+k>0\\ -\infty & \text{se } h+k<0\\ 0 & \text{se } h+k=0\end{cases}.$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log\left(1+x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine: infatti $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\log\left(1+h^2\right)}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+h^2\right)-h^2}{h^3}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2h}{1+h^2}-2h}{3h^2}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{-2h^3}{(3h^2)(1+h^2)}=\lim_{h\to0}\frac{-2h}{3\left(1+h^2\right)}=0$; analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=$
$=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{\log\left(1+k^2\right)}{k^2}-1}{k}=0$; la funzione è inoltre

differenziabile (e quindi ha derivate direzionali) nell'origine perché
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\log\left(1+h^2+k^2\right)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{\log\left(1+\rho^2\right)}{\rho^2}-1}{\rho} = 0.$$

(d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z^2}{x^2+y^4+z^6} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ è identicamente nulla sugli assi cartesiani, quindi possiede tutte le derivate parziali (nulle) nell'origine; inoltre, è differenziabile (e quindi derivabile in ogni direzione) in quanto $\displaystyle\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left|\frac{hk^2j^2}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\right| =$
$$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left|\frac{\sqrt{h^2}\sqrt{k^4}\sqrt{j^2}|j|}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\right| \leq$$
$$\leq \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left|\frac{\sqrt{h^2+k^4+j^6}\sqrt{h^2+k^4+j^6}\sqrt{h^2+k^2+j^2}|j|}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\right| =$$
$$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} |j| = 0.$$

(e) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ è chiaramente differenziabile fuori dagli assi cartesiani; sugli assi cartesiani, l'unico punto in cui esistono entrambe le derivate parziali è l'origine: infatti, $f(x,0) = 0 = f(y,0)$ e quindi le derivate parziali sono entrambe nulle; nei punti del tipo $(x_0,0)$ con $x_0 \neq 0$ invece, esiste solo $\frac{\partial f}{\partial y}$, anch'essa nulla, poiché $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) =$ $= \displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+k,0)-f(x_0,0)}{k} = 0$, mentre $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) =$ $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x_0h|}}{h}$ non esiste; per simmetria, nei punti $(0,y_0)$ esiste (nulla) $\frac{\partial f}{\partial x}$ ma non $\frac{\partial f}{\partial y}$; anche le derivate direzionali esistono solamente nell'origine perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$ $= \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2xy}}{t} = \sqrt{|xy|}$ ma se $x_0 \neq 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+th,tk)-f(x_0,0)}{t} =$ $= \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{|(x_0+th)tk|}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{|(x_0+th)k|}{t}} = +\infty$ e per simmetria nei punti del tipo $(0,y_0)$ si ha $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,y_0+tk)-f(0,y_0)}{t} =$ $= \displaystyle\sqrt{\frac{|h(y_0+tk)|}{t}} = +\infty$; nell'origine, tuttavia, la funzione non è differenziabile perché $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se $h = k$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è chiaramente differenziabile al di fuori dell'asse y; l'unico punto di quest'asse in cui la funzione ammette derivate parziali è l'origine; infatti, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) =$ $= \displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(0,y_0+k)-f(0,y_0)}{k} = 0\ \forall y_0$ ma $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} y_0^2 \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$, che esiste (e vale 0), $\Leftrightarrow y_0 = 0$; inoltre, la funzione è differenziabile nell'origine, perché $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \left| \dfrac{hk^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|h|(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$ $= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} |h|\sqrt{h^2+k^2} = 0$; infine, negli altri punti f ammette derivate direzionali solamente in direzione dell'asse y: infatti, se $y_0 \neq 0$ si ha $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(th, y_0+tk)-f(0,y_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{th(y_0+tk)^2 \sin\left(\frac{1}{th}\right)}{t} =$ $= \lim\limits_{t\to 0^+} h(y_0+k)^2 \sin\left(\dfrac{1}{th}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ \nexists & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.

2. (a) $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^6+y^2}$ può essere estesa ad una funzione continua anche nell'origine con $f(0,0)=0$, perché $|f(x,y)| \le \dfrac{|x|y^2\left(x^6+y^2\right)}{x^6+y^2} =$ $= |x|y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; la funzione ammette inoltre derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché $f(x,0) = 0 = f(0,y)$, mentre negli altri punti si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^4\left(x^6+y^2\right)-6x^6y^4}{\left(x^6+y^2\right)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ $= \dfrac{4xy^3\left(x^6+y^2\right)-2xy^5}{\left(x^6+y^2\right)^2}$, e sono entrambe continue nell'origine perché $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \left|\dfrac{y^4\left(x^6+y^2\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{6x^6y^4}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| \le \left|\dfrac{y^2\left(x^6+y^2\right)^2}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| +$ $+ \dfrac{6x^6\left(x^6+y^2\right)^2}{\left(x^6+y^2\right)^2} = y^2 + 6x^6 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le$ $\left|\dfrac{4xy^3\left(x^6+y^2\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{2xy^5}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| \le \dfrac{4|xy|\left(x^6+y^2\right)\left(x^6+y^2\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2} +$ $+ \dfrac{2|xy|\left(x^6+y^2\right)^2}{\left(x^6+y^2\right)^2} = 6|xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; quindi, la funzione può essere prolungata ad una funzione di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$ può essere anch'essa estesa ad una funzione continua nell'origine con $f(0,0)=0$, in quanto $|f(x,y)| \le \dfrac{x^2\left(x^4+y^2\right)}{x^4+y^2} =$ $= x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; inoltre, essendo nulla lungo gli assi cartesiani, f possiede anche derivate parziali nell'origine; tuttavia, solamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ è continua nell'origine, infatti $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{2xy^2\left(x^4+y^2\right)-4x^5y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| \le$ $\le \dfrac{2|x|y^2\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} + \dfrac{4|x|^5y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} \le \dfrac{2|x|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} +$ $+ \dfrac{4|x|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} = 6|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$, ma $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$

$$= \frac{2x^2y\left(x^4+y^2\right)-2x^2y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$ e quest'ultima quantità non è continua perché, calcolata lungo la curva $y = x^2$, vale $\dfrac{4x^8-2x^8}{4x^8} = \dfrac{1}{2}$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{(x^6+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è anch'essa nulla sugli assi cartesiani e quindi le derivate parziali nell'origine esistono e sono nulle, $\forall \alpha > 0$; la funzione è anche differenziabile (e ha derivate direzionali) per $\alpha < \dfrac{2}{3}$: infatti, se $\alpha \geq \dfrac{2}{3}$ il limite $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}$ calcolato sulla curva $k = h^3$, vale $\dfrac{|h|^{4-6\alpha}}{2^\alpha\sqrt{1+h^4}}$, che non tende a 0, mentre se $\alpha < \dfrac{2}{3}$ allora
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|h|\left(h^6\right)^{\frac{1}{6}}\left(k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}} \leq$$
$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{h^2+k^2}\left(h^6+k^2\right)^{\frac{1}{6}}\left(h^6+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(h^2+k^6\right)^{\frac{2}{3}-\alpha} = 0;$$
infine, la funzione ammette derivate direzionali nell'origine anche per $\alpha \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{t^3h^2k}{t\left(t^6h^6+t^2k^2\right)^\alpha} = \lim_{t\to0^+}\frac{t^{2-2\alpha}h^2k}{\left(t^4h^6+k^2\right)^\alpha}$ esiste finito solamente per $\alpha \leq 1$.

4. (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è chiaramente continua, è dotata di tutte le derivate direzionali in quanto $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} =$ $= \sqrt{h^2+k^2}$, ma non ha derivate parziali perché $f(x,0) = |x|$ e $f(0,y) = |y|$ non sono funzioni derivabili.

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ è chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$ $\displaystyle= \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t} = \lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = +\infty$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ è chiaramente continua nell'origine, ma non ammette derivate parziali perché $f(x,0) = x^{\frac{2}{3}}$ e $f(0,y) = y^{\frac{2}{3}}$ non sono funzioni derivabili in 0, e non possiede derivate direzionali in alcuna direzione perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t} =$ $\displaystyle= \lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}} = +\infty$.

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ non è continua nell'origine perché $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^6+x^4} = \dfrac{1}{x^2+1} \overset{x\to0}{\to} 1$; l'esistenza di derivate parziali e direzionali di questa funzione è stata già discussa nel terzo esercizio, con $\alpha = 1$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine, con derivate parziali entrambe nulle, perché è nulla lungo gli assi cartesiani; non è continua perché $f(x,x) = \dfrac{1}{2} \overset{x\to 0}{\nrightarrow} 0$ e non ha le derivate direzionali in quanto $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2 hk}{t^3\,(h^2+k^2)} =$
$= \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{hk}{t\,(h^2+k^2)} = +\infty$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A \\ 1 & \text{se } (x,y) \in A \end{cases}$, ove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2, x \neq 0\}$ non è continua, perché non lo è lungo la parabola A, non ha le derivate parziali perché lungo gli assi vale rispettivamente $|x|$ e $|y|$, ma ha tutte le derivate direzionali perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} = \sqrt{h^2+k^2}$, dato che per t opportunamente piccolo la funzione lungo qualsiasi retta coincide con $\sqrt{x^2+y^2}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 9 (28 Novembre 2008)
Massimi e minimi in più variabili, formula di Taylor

1. (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$: le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x^2y$, dunque i punti in cui $\nabla f(x,y) = (0,0)$ sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x\left(1-y^2\right) = 0 \\ 2y\left(1-x^2\right) = 0 \end{cases}$: dalla prima equazione si deduce che $x = 0 \vee y = \pm 1$: se $x = 0$, dalla seconda ricaviamo $y = 0$, mentre se $y = \pm 1$ si ricava $x = \pm 1$, quindi i punti critici di f sono i seguenti: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$; per determinare la loro natura, studiamo la matrice Hessiana: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$ $= 2\left(1-y^2\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\left(1-x^2\right)$, dunque $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che è chiaramente definita positiva e dunque il punto $(0,0)$ è un minimo locale, mentre $H_f(1,1) = H_f(-1,-1) =$ $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo e dunque i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono due selle; infine $H_f(-1,1) = H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ha anch'essa determinante negativo e quindi anche questi due sono punti di sella.

   (b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy - x^2y^2$: $\nabla f(x,y) = \big(2xy + y^2 - y - 2xy^2,$ $x^2 + 2xy - x - 2x^2y\big) = (y(y-1)(1-2x), x(x-1)(1-2y))$ e dunque i punti critici sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} -2y(y-1) & (1-2x)(2y-1) \\ (1-2x)(2y-1) & -2x(x-1) \end{pmatrix}$, quindi $H_f(0,0) =$ $= H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_f(0,1) = H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; dunque, il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo locale, mentre gli altri non sono né massimi né minimi.

   (c) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{2y^3}{3} - 4x^2 - y^2 + 2xy^2 + 2xy - x^2y$. $\nabla f(x,y) =$ $= \left(x^2 - 8x + 2y^2 + 2y - 2xy, -2y^2 - 2y + 4xy + 2x - x^2\right)$, quindi i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 - 8x + 2y^2 + 2y - 2xy = 0 \\ -2y^2 - 2y + 4xy + 2x - x^2 = 0 \end{cases}$. Sommando le due equazioni si ottiene che $2xy - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 3$; se $x = 0$ sostituendo nella prima equazione si ottiene $2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = -1$; se $y = 3$

si ottiene invece che $x^2-14x+24=0 \Rightarrow x=12 \vee x=2$; i punti stazionari di f sono dunque $(0,0)$, $(0,-1)$, $(12,3)$ e $(2,3)$; Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2x-8-2y & 4y+2-2x \\ 4y+2-2x & -4y-2+4x \end{pmatrix}$, dunque nei punti critici otteniamo $H_f(0,0)=\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $H_f(0,-1)=$ $=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $H_f(12,3)=\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$ e $H_f(2,3)=\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$, quindi $(0,0)$ è un punto di massimo, $(12,3)$ è un punto di minimo e $(0,1)$ e $(2,3)$ sono punti di sella.

(d) $f(x,y)=(x+y)\,(y+1)^2$: $\nabla f(x,y)=\left((y+1)^2,(y+1)(2x+3y+\right.$ $\left.+1)\right)=(0,0) \Leftrightarrow y=-1$; $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2(y+1) \\ 2(y+1) & 2x+3y+1+3(y+1) \end{pmatrix}$ e dunque $H_f(x,-1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x-2 \end{pmatrix}$ è semidefinita e quindi non sappiamo ancora di che tipo sono questi punti critici; per saperlo, studiamo il segno della funzione: $f(x,y)>0 \Leftrightarrow x>-y$, quindi i punti $(x,-1)$ con $x>1$ si trovano all'interno della regione in cui f è positiva ma $f(x,-1)=0$ quindi sono dei minimi locali; analogamente, se $x<1$, per ognuno di questi punti c'è un intorno in cui la funzione è negativa e quindi sono dei minimi; infine, $(1,-1)$ è una sella perché intorno ad esso ci sono sia punti in cui f è negativa sia punti in cui è positiva.

(e) $f(x,y)=x^4+y^2e^{y+2x^2}$: $\nabla f(x,y)=\left(4x^3+4xy^2e^{y+2x^2},y(2+y)e^{y+2x^2}\right)$, quindi i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} 4x^3+4xy^2e^{y+2x^2}=0 \\ y(2+y)e^{y+2x^2}=0 \end{cases}$; dalla prima equazione si ricava che $x=0$ e dalla seconda che $y=0 \vee y=-2$. Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x,y)=$
$$=\begin{pmatrix} 12x^2+4y^2(1+4x^2)e^{y+2x^2} & 4x(2y+y^2)e^{y+2x^2} \\ 4x(2y+y^2)e^{y+2x^2} & (2+2y)e^{y+2x^2}+(2y+y^2)e^{y+2x^2} \end{pmatrix},$$
quindi $H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $H_f(0,-2)=\begin{pmatrix} 16e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$, quindi $(0,-2)$ è un punto di sella ma non abbiamo sul punto $(0,0)$; notiamo per che si ha $f(x,y)=x^4+y^2e^{y+2x^2} \geq 0 = f(0,0)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo.

(f) $f(x,y)=x^3-x^2\cos y$: $\nabla f(x,y)=\left(3x^2-2x\cos y, x^2\sin y\right)$, che si annulla nei punti del tipo $(0,y)$, $\left(\frac{2}{3},2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{2}{3},(2k+1)\pi\right)$; $H_f(x,y)=$ $\begin{pmatrix} 6x-2\cos y & 2x\sin y \\ 2x\sin y & x^2\cos y \end{pmatrix}$, dunque $H_f\left(\frac{2}{3},2k\pi\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ e perciò i punti del tipo $\left(\frac{2}{3},2k\pi\right)$ sono dei minimi, mentre $H_f\left(-\frac{2}{3},(2k+1)\pi\right)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$ e quindi i punti di questo tipo sono dei massimi locali. Tuttavia, sui punti dell'asse y la matrice

Hessiana $H_f(0,y) = \begin{pmatrix} -2\cos y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è semidefinita e quindi non ci da informazioni; cerchiamo di capire la natura di questi punti critici studiando il segno della nostra funzione: $f(x,y) > 0 \Leftrightarrow x > \cos y$; dunque, i punti del tipo $(0,y)$ con $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < y < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ sono dei massimi locali, perché $f(0,y) = 0$ ma in ognuno di questi punti c'è un intorno in cui la funzione assume valori negativi; analogamente, i punti con $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi < y < \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$ sono minimi locali perché intorno ad ognuno di questi punti la funzione ha valori positivi, ed infine i punti del tipo $\left(0, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ sono punti di sella perché intorno a ciascuno di questi punti la funzione assume sia valori positivi che negativi.

(g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2 + x^4$: $\nabla f(x,y,z) = \big(2x - 2xy^2 + 4x^3, 2y - 2x^2y, 2z\big)$, pertanto i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x - 2xy^2 + 4x^3 = 0 \\ 2y - 2x^2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$: dalla terza equazione ricaviamo che $z = 0$; dalla seconda otteniamo $y = 0 \vee x = \pm 1$; se $y = 0$ dalla prima equazione si ricava $2x + 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$; se $x = \pm 1$ abbiamo $6 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$, dunque i punti stazionari sono $(0,0,0)$, $\left(\pm 1, \sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\pm 1, -\sqrt{3}, 0\right)$. Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 - 2y^2 + 12x & -4xy & 0 \\ -4xy & 2 - 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $H_f(0,0,0) = $ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è una matrice definita positiva e dunque $(0,0,0)$ è un punto di minimo locale per f; $H_f\left(1, \pm\sqrt{3}, 0\right) = $ $= \begin{pmatrix} 8 & \mp 4\sqrt{3} & 0 \\ \mp 4\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $H_f(-1, \pm\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} -16 & \pm 4\sqrt{3} & 0 \\ \pm 4\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hanno autovalori 2, 12 e -4 e quindi $\left(\pm 1, \pm\sqrt{3}, 0\right)$ sono punti di sella.

(h) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$: $\nabla f(x,y,z) = (-yz\sin(xyz), -xz\sin(xyz), xz\sin(xyz)) = (0,0,0) \Leftrightarrow xyz = k\pi$; per classificare questi punti stazionari non sono necessari ulteriori calcoli: è sufficiente notare che la funzione assume valori tra -1 e 1 e dunque i punti critici appartenenti alla regione $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xyz = 2k\pi\}$, essendo tali che $f(x,y,z) = 1$, saranno necessariamente dei punti di massimo, mentre i punti tali che $xyz = (2k+1)\pi$ sono dei minimi, perché la funzione in quei punti vale -1.

2. (a) $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$: notiamo che $f(0,y) = +\infty$ e quindi $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$; inoltre, f è inferiormente limitata perché $x^4 - x^2 + y^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$; cerchiamo gli even-

tuali punti di minimo tra i punti stazionari della nostra funzione: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 2x, 2y\right)$, quindi i tre punti critici sono $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$: essendo $f(0,0) = 0$ e $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ possiamo concludere che $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$
$= f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + y^4 + 3}$ è una funzione strettamente positiva, perché non si annulla in alcun punto e $f(0,0) = \frac{1}{3} > 0$; inoltre $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$, quindi $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$ e dunque (per quanto dimostrato nell'ultimo esercizio del settimo tutorato) la funzione ammetterà sicuramente almeno un punto di massimo, che sarà tra i suoi punti critici, ma essendo $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x+y^4+3\right)^2},\right.$
$\left.\dfrac{4y^3}{\left(x^2+2x+y^4+3\right)^2}\right)$ nullo solamente nel punto $(-1,0)$, questo sarà proprio l'unico punto di massimo assoluto di f, quindi $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$
$= \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(-1,0) = \frac{1}{2}$.

3. (a) $f(x,y) = \cos x \sin y$: Ricordiamo la formula dello sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto $(0,0)$: $f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle +$
$+\frac{1}{2}\langle H_f(0,0)(x,y), (x,y)\rangle + o\left(x^2+y^2\right)$; calcoliamo dunque le derivate prime e seconde della nostra funzione: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x \sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$
$= \cos x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x \cos y$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos x \sin y$: calcolando queste derivate nell'origine, si ha $\nabla f(0,0) = (0,1)$ e $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\cos(x)\sin(y) = 0+$
$+\langle (0,1), (x,y)\rangle + \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x,y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + o\left(x^2+y^2\right) = y+$
$+o\left(x^2+y^2\right)$.

(b) $f(x,y) = \log\left(1+x+y^2\right)$: $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{1}{1+x+y^2}, \dfrac{2y}{1+x+y^2}\right)$,
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+x+y^2)^2} & -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2} \\ -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2} & \frac{2\left(1+x+y^2\right)-4y^2}{(1+x+y^2)^2} \end{pmatrix}$, quindi $\log\left(1+x+y^2\right) =$
$= \langle (1,0), (x,y)\rangle + \frac{1}{2}\langle (x,y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + o\left(x^2+y^2\right) = x - \frac{x^2}{2} +$

$+y^2 + o\left(x^2+y^2\right)$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$: essendo la funzione nulla lungo gli assi cartesiani, si avrà $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mentre nei punti diversi dall'origine si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3\left(x^4+y^2\right) - 4x^4y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$
$= \dfrac{3xy^2\left(x^4+y^2\right) - 2xy^4}{\left(x^4+y^2\right)^2}$, che sono entrambe continue nell'origine, perché
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\dfrac{y^3\left(x^4+y^2\right) - 4x^4y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| \leq \dfrac{|y|^3\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} + \dfrac{4x^4|y|^3}{\left(x^4+y^2\right)^2} \leq$
$\leq \dfrac{|y|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} + \dfrac{4\left(x^4+y^2\right)|y|\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} = 5|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ e
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\dfrac{3xy^2\left(x^4+y^2\right) - 2xy^4}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| \leq \dfrac{3|x|y^2\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} + \dfrac{2|x|y^4}{\left(x^4+y^2\right)^2} \leq$
$\leq \dfrac{3|x|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} + \dfrac{2|x|\left(x^4+y^2\right)^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} = 5|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; dunque, $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Facciamo vedere ora che f non è di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$: se per assurdo lo fosse, per il lemma di Schwartz dovrebbe essere $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, e quindi in particolare anche nell'origine; invece, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0$ ma $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} =$
$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^5}{y^4 y} = 1.$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è chiaramente differenziabile al di fuori dell'origine, quindi ci limiteremo a studiarne il comportamento nell'origine: la funzione è continua perché $\left|\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right| = \dfrac{|y|\sqrt{x^4}\sqrt{y^4}}{x^4+y^4} \leq$
$\leq \dfrac{|y|\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4} = |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; inoltre, ammette derivate parziali entrambe nulle perché lungo gli assi è identicamente nulla, e ammette anche derivate direzionali perché $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} =$
$= \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^5h^2k^3}{t^5\left(x^4+y^4\right)} = \dfrac{h^2k^3}{h^4+k^4}$; tuttavia, la funzione non è differenziabile perché $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - \langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k^3}{\left(h^4+k^4\right)\sqrt{h^2+k^2}}$ non esiste, in quanto lungo gli assi tale

quantità vale 0, ma se $h = k$ vale $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzione del tutorato numero 10 (5 Dicembre 2008)

Integrali dipendenti da parametro, massimi e minimi vincolati

1. Sia $G(y,z) = \int_z^y \tan\left(t^2\right) dt$ e sia $\gamma(x) = (\cos x, \sin x)$: notiamo che $f(x) = = G(\gamma(x))$, dunque $f'(x) = \langle \nabla G(\gamma(x)), \dot{\gamma}(x) \rangle$; inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $\nabla G(y,z) = \left(\tan\left(y^2\right)\right), -\left(\tan\left(z^2\right)\right)$ e quindi $f'(x) = \left\langle \left(\tan\left(\cos^2 x\right), -\tan\left(\sin^2 x\right)\right), (-\sin x, \cos x) \right\rangle = = \left(-\sin x \tan\left(\cos^2 x\right) - \cos x \tan\left(\sin^2 x\right)\right)$.

2. Sia $G(y,z) = \int_{y^2}^{y^3} e^{-z^6 t^2} dt$, e sia $\gamma(x) = (x,x)$: notiamo che $f(x) = G(\gamma(x))$, dunque $f'(x) = \langle \nabla G(\gamma(x)), \dot{\gamma}(x) \rangle = \frac{\partial G}{\partial y}(x,x) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,x)$; inoltre, $\frac{\partial}{\partial z} e^{-z^6 t^2} = = -6t^2 z^5 e^{-z^6 t^2}$ esiste per ogni t fissato e, per $z \in [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$, si ha $\left| \int_{y^2}^{y^3} -6t^2 z^5 e^{-z^6 t^2} dt \right| \leq 6(|z_0 + \delta|)^5 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-(|z_0 - \delta|)^6 t^2} dt < +\infty$, dunque sono soddisfatte le ipotesi per portare la derivazione sotto il segno di integrale e perciò $\nabla G(y,z) = \left(3y^2 e^{-z^6 y^6} - 2y e^{-z^6 y^4}, \int_{y^2}^{y^3} -6t^2 z^5 e^{-z^6 t^2} dt \right)$ e quindi $f'(x) =$
$= 3x^2 e^{-x^{12}} - 2x e^{-x^{10}} - 6x^5 \int_{x^2}^{x^3} t^2 e^{-x^5 t^2} dt.$

3. $f(x,y) = \int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$: fissato t, la funzione $e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}$ è di classe C^1, e dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, è possibile derivare sotto segno di integrale, quindi $\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 -2t^2 x e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^1 -2t^2 y e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$, dunque $\nabla f = \left(-2x \int_0^1 t^2 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt, -2y \int_0^1 t^2 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt \right)$; il gradiente si annulla solamente nel punto $(0,0)$, perché $\int_0^1 t^2 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$ è l'integrale di una funzione non negativa, continua e non identicamente nulla e quindi non è mai nullo; notiamo inoltre che $e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} \leq 1$ e dunque $f(x,y) = \int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt = 1 = f(0,0)$, quindi l'origine è un punto di massimo assoluto per la funzione, e dunque è anche di massimo locale.

4. $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) dx.$

(a) Fissato x, la funzione $t \to e^{-x^2}\sin(tx)$ è continua; inoltre, $\left|e^{-x^2}\sin(tx)\right| \leq$ $\leq e^{-x^2}$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} < +\infty$, dunque c'è equidominatezza e quindi, per il teorema di continuità sotto integrale, si ha che $f \in C(\mathbb{R})$.

(b) $\dfrac{\partial}{\partial t} e^{-x^2}\sin(tx) = xe^{-x^2}\cos(tx)$ è una funzione continua in t; inoltre $\left|xe^{-x^2}\cos(tx)\right| \leq |x|e^{-x^2}$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|e^{-x^2} < +\infty$, dunque c'è equidominatezza e quindi, per il teorema di derivazione sotto integrale, si ha che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(c) Per quanto visto in precedenza, sono soddisfatte tutte le ipotesi necessarie per derivare sotto il segno di integrale, dunque $f'(t) =$ $= \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\cos(tx)dx$; integrando per parti, si ottiene

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\cos(tx)dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\cos(tx)\right]_0^{+\infty} -$$
$$- \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} t\sin(tx)dx = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(tx)dx = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}f(t).$$

5. $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}dx.$

(a) Notiamo innanzi tutto che $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1 - e^{x(1-t)}}{x}dx$, dunque l'integranda non ha un asintoto nell'origine per nessun valore di t, in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{1 - e^{x(1-t)}}{x} = t - 1$, quindi la convergenza dell'integrale dipenderà solamente dal comportamento all'infinito dell'integranda: sicuramente per $t < 0$ la funzione non è definita perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}dx = -\infty$, se $t > 0$ l'integrale converge perchè ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$ e in $t = 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x}dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{dx}{x}$ e dunque diverge; quindi, l'insieme di definizione di f è $(0, +\infty)$.

(b) Innanzi tutto, f è continua perché se $t \in [\tau, +\infty)$, allora $|f(t)| \leq$ $\leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-x} - e^{-\tau x}}{x}\right| dx < +\infty$ e dunque c'è equidominatezza e si può applicare il teorema di continuità sotto integrale. Inoltre, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} = e^{-tx}$ e quindi per $t \in [\tau, +\infty)$ abbiamo che $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|e^{-\tau x}\right| dx < +\infty$, quindi la funzione è C^1 e $f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}$.

(c) $f(t) = \displaystyle\int_1^t f'(s)ds - f(1) = \int_1^t \frac{ds}{s} = \log t$, perché $f(1) =$

$$= \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

6. Innanzi tutto, notiamo che in tutti i casi la funzione f è continua e l'insieme A è compatto, dunque esisteranno sempre sia il massimo che il minimo.

   (a) $f(x,y) = x - y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2\}$; usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: $\begin{cases} 1 = \lambda(2x) \\ -1 = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$; sommando le prime due equazioni, abbiamo che $2\lambda(x+y) = 0$, ma λ non può essere uguale a 0, altrimenti la prima equazione del sistema darebbe $1 = 0$, dunque deve essere $x = -y$: sostituendo questo all'interno della terza equazione, abbiamo che $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$, quindi i due possibili punti di massimo/minimo sono $(1,-1)$ e $(-1,1)$; poiché $f(1,-1) = 2$ e $f(-1,1) = -2$, possiamo concludere che $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = 2$ e $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = -2$. (Alternativamente, si poteva procedere notando che $A = \{(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), t \in [0, 2\pi)\}$ e studiare il massimo e il minimo della funzione $f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ per $t \in [0, 2\pi)$).

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{y - 3x + 3}$: questa volta, l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$ non coincide esattamente con l'insieme di livello di una funzione, ma presenta anche due punti di bordo che andranno studiati separatamente: per quanto riguarda invece i punti all'interno del vincolo, per i moltiplicatori di Lagrange si ha $\begin{cases} \frac{3}{(y-3x+3)^2} = -2\lambda x \\ -\frac{1}{(y-3x+3)^2} = \lambda \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$; posto $\mu = \lambda\left(y - 3x + 3\right)^2$, il sistema diventa $\begin{cases} 3 = -2\mu x \\ -1 = \mu \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$: sostituendo il valore di $\mu = -1$ nella prima equazione, troviamo $x = \dfrac{3}{2}$: i tre possibili punti di massimo/minimo sono dunque $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ e i due punti di bordo $(0,0)$ e $(2,4)$, ma essendo $f(0,0) = \dfrac{1}{3}$, $f(2,4) = 1$, $f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{4}{3}$, concludiamo che $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{4}{3}$ e $\min\limits_{(x,y)\in A} = f(0,0) = \dfrac{1}{3}$. (Alternativamente, si poteva studiare il massimo e il minimo della funzione $f\left(x, x^2\right)$ per $x \in [0,2]$).

   (c) $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$: stavolta, oltre al solito vincolo, l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq 9\}$ contiene anche punti interni, quindi bisognerà studiare anche gli eventuali massimi e minimi all'interno dell'insieme: $\nabla f = \left(3x^2 - 3, 2y\right)$ si annulla nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$, dove la funzione vale rispettivamente 2 e -2; cerchiamo ora altri eventuali punti di massimo o minimo sul bordo di A risolvendo il sistema:

$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 8\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$; dalla seconda equazione si ricava che $y = 0 \vee \lambda =$ $= 1$: se $y = 0$, dall'equazione del vincolo otteniamo che $x = \dfrac{3}{2}$, e $f\left(\pm\dfrac{3}{2}, 0\right) = \pm\dfrac{9}{8}$; se invece $\lambda = 1$ otteniamo $3x^2 - 3 = 8x$, cioè $x = 3 \vee$ $\vee x = -\dfrac{1}{3}$: per $x = 3$ non ci sono punti sull'insieme A, mentre se $x = -\dfrac{1}{3}$ otteniamo $y = \pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ e $f\left(-\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}\right) = \dfrac{259}{27}$; riassumendo, $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f\left(-\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}\right) = \dfrac{259}{27}$ e $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = f(1,0) = -2$.

(d) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\right\}$: notiamo innanzi tutto che la funzione è strettamente positiva all'interno di A ed è nulla sul bordo, dunque $\min\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = f(x,y,0) = f(x,0,z) =$ $= f(0,y,z) = 0$; cerchiamo ora il massimo della funzione sul vincolo: $\begin{cases} y^2z^3 = \lambda \\ 2xyz^3 = \lambda \\ 3xy^2z^2 = \lambda \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$; eguagliando le prime due equazioni, e sapendo che $y \neq 0 \neq z$, otteniamo che $y = 2x$, facendo la stessa cosa con la prima e la terza invece abbiamo $z = 3x$, e sostituendo nel vincolo troviamo $x = \dfrac{1}{6}$; dunque, il punto $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ deve essere necessariamente il punto di massimo della funzione sull'insieme A e dunque $\max\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{432}$.

7. I punti dell'ellissoide $2x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 1 = 0$ che distano meno dall'origine sono i punti della superficie di livello $2x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 1 = 0$ in cui la funzione distanza dall'origine $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ assume valore minimo, dunque l'esercizio consiste nella ricerca di punti di minimo vincolati; notiamo infine che una funzione f non negativa raggiunte il suo minimo valore in un punto se e solo se raggiunge il minimo anche la funzione $\sqrt{f}$, dunque per semplicità di calcolo studieremo il minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'insieme $2x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 1 = 0$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} 2x = \lambda(4x - 4) \\ 2y = \lambda(2y) \\ 2z = \lambda(2z) \\ 2x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 1 = 0 \end{cases}$: dalla seconda e terza equazione si ricava che $\lambda = 1$, oppure $y = 0 = z$; se $\lambda = 1$, dalla prima equazione si ricaverebbe $x = 2$, ma nell'ultima si avrebbe $y^2 + z^2 + 1 = 0$, quindi deve essere necessariamente $y = 0 = z$, cioè nell'ultima equazione $2x^2 - 4x + 1 =$ $= 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; nel punto $\left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$ la funzione $f(x,y,z) = x^2 +$

$+y^2+z^2$ vale $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$, mentre in $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},0,0\right)$ vale $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$; dunque, il punto di quell'ellissoide che dista meno dall'origine è $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},0,0\right)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 11 (12 Dicembre 2008)

Equazioni differenziali, massimi e minimi vincolati

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = 4x(t) \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{4x(t)} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds =$
$= \displaystyle\int_0^t ds \overset{x(t)=x}{=} \dfrac{1}{4}\int_3^{x(t)} \dfrac{dx}{x} = t \Rightarrow \log|x(t)| - \log 3 = 4t \Rightarrow x(t) =$
$= e^{4t+\log 3} = 3e^{4t}$. (È stato scelto il segno positivo di $x(t)$ per rispettare le condizioni iniziali.)

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases} = \dot{x}(t) = 1 + x^2(t) \Rightarrow \displaystyle\int_0^t \dfrac{\dot{x}(s)}{x^2(s)+1} ds = \int_0^t ds \Rightarrow$
$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{x(t)} \dfrac{dx}{x^2+1} = t \Rightarrow \arctan t - \arctan 0 = t \Rightarrow x(t) = \tan(t+$
$+ \arctan 0) = \tan t$.

   (c) $\begin{cases} \dot{x} - tx = 2t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: questa equazione appartiene a quelle del tipo $\dot{x}(t)+$
$+a(t)x(t) = b(t)$, dove in questo caso $a(t) = -t$ e $b(t) = 2t^3$; dunque la soluzione sarà data da $x(t) = e^{-\int_0^t -sds}\left(x(0)+\right.$
$\left.+\displaystyle\int_0^t 2s^3 e^{\int_0^s -udu} ds\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(1 + 2\int_0^t s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\,(1+$
$+2\left[-s^2 e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_0^t + 4\displaystyle\int_0^t s e^{-\frac{s^2}{2}} ds\Big) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(-2t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 4e^{-\frac{t^2}{2}} + 5\right) =$
$= 5e^{\frac{t^2}{2}} - 2t^2 - 4$.

   (d) $\begin{cases} \dot{x} + x = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$: applichiamo lo stesso metodo del punto precedente, e in questo caso $a(t) = 1$ e $b(t) = \sin t$: $x(t) =$
$= e^{-\int_0^t ds}\left(\displaystyle\int_0^t \sin s e^{\int_0^s du} ds\right) = e^{-t}\left(\int_0^t e^s \sin s ds\right) =$
$= e^{-t}\left([e^s \sin s]_0^t - \displaystyle\int_0^t e^s \cos s ds\right) = e^{-t}\left(e^t \sin t - [e^s \cos s]_0^t +\right.$
$\left.+\displaystyle\int_0^t e^s \sin s ds\right) \Rightarrow 2\int_0^t e^s \sin s ds = 1 + e^t \sin t - e^t \cos t \Rightarrow x(t) =$
$= e^{-t}\left(\dfrac{1 + e^t \sin t - e^t \cos t}{2}\right) = \dfrac{e^t + \sin t - \cos t}{2}$.

   (e) $\begin{cases} \dot{x} = 2xt^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $\displaystyle\int_1^{x(t)} \dfrac{dx}{x} = \int_0^t 2s^3 ds \Rightarrow \log|x(t)| - \log 1 = \dfrac{t^4}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = e^{\frac{t^4}{2}}$. (Anche in questo caso è stato scelto il segno positivo per rispettare le condizioni iniziali)

   (f) $\begin{cases} \dot{x} = t^2 x^4 \\ x(1) = 2 \end{cases}$: $\displaystyle\int_2^{x(t)} \dfrac{dx}{x^4} = \int_0^t s^2 ds \Rightarrow -\dfrac{1}{3x(t)^3} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(t)^3} = \frac{1-8t^3+8}{8} \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{9-8t^3}}.$$

(g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$: la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema, dunque la soluzione è $x(t) = 0$

(h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$: effettuando il cambio di variabile $y(t) = tx(t)$ il sistema diventa $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$: $\displaystyle\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_1^t ds \Rightarrow 1 - \frac{1}{y(t)} = t- -1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2-t} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2t-t^2}$.

(i) $\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{x} \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: effettuando il cambio di variabile $y(t) = \dot{x}(t)$ otteniamo $\begin{cases} \dot{y} = -2y \\ y(0) = -1 \end{cases}$: $\displaystyle\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = -2t \Rightarrow \log|y| = -2t \Rightarrow y = -e^{-2t}$, ove il segno meno è stato scelto per via dei dati iniziali: inserendo questi valori nel sistema iniziale abbiamo $\begin{cases} \dot{x} = -e^{-2t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$, e dunque $x(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t e^{-2s}ds = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$: se $\alpha \geq 1$, la funzione $|x|^\alpha$ è localmente lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$ e quindi per il teorema di Picard la soluzione è unica; inoltre, la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema e quindi la soluzione è $x(t) = 0$.
Se invece $0 < \alpha < 1$, possiamo cercare un'altra soluzione con il metodo di separazione delle variabili: $\displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = t \Rightarrow \frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{x(t)}{|x(t)|} = t \Rightarrow$ $\Rightarrow x(t)|x(t)|^{-\alpha} = t(1-\alpha) \Rightarrow |x(t)|^{1-\alpha} = (1-\alpha)|t| \Rightarrow x(t) =$ $\pm((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}$: abbiamo dunque trovato altre due soluzioni del problema di Cauchy: in realtà, una soluzione del problema è data anche dalla funzione $x(t) = \begin{cases} ((1-\alpha)(t_1-t))^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ ((1-\alpha)(t-t_2))^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } t > t_2 \end{cases}$ $\forall t_1 < 0 < t_2$, dunque per $\alpha \in (0,1)$ ci sono infinite soluzioni.

3. $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} e^{t^2}dt$: cerchiamo massimi e minimi sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: essendo $\nabla f(x,y) =$ $= \left(-2xe^{x^4}, 2ye^{y^4}\right)$, il sistema da risolvere è $\begin{cases} -2xe^{x^4} = 2\lambda x \\ 2ye^{y^4} = 2\lambda y \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$; dalla prima equazione ricaviamo che o $x = 0$ oppure $\lambda = -e^{x^4}$, mentre dalla seconda abbiamo $y = 0$ o $e^{y^4} = \lambda$; se $x = 0$, dal vincolo otteniamo $y = \pm 1$, mentre se $y = 0$ abbiamo $x = \pm 1$, e $f(0, \pm 1) = \displaystyle\int_0^1 e^{t^2}dt = -\int_1^0 e^{t^2}dt =$

$= f(\pm 1, 0)$; se invece $x \neq 0 \neq y$, si ha $-e^{x^4} = \lambda = e^{y^4}$, cioè $e^{x^4} + e^{y^4} = 0$, che è assurdo; dunque, $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 e^{t^2} dt$ e $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) =$
$= -\displaystyle\int_0^1 e^{t^2} dt$.

4. $f(x,y,z) = x + y + z$: $\nabla f(x,y) = (1,1,1)$, dunque non ci sono punti stazionari all'interno di A la funzione sarà nulla; cerchiamo ora gli estremi della funzione sul bordo del nostro insieme: $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$; notiamo che sicuramente $\lambda \neq 0$, perché altrimenti si avrebbe $1 = 0$, dunque abbiamo che $x = y = z = \dfrac{1}{\lambda}$, quindi, sostituendo questi valori nel vincolo, otteniamo $3x^2 = 1$ i punti $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$: essendo $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\sqrt{6}$, concludiamo che $\max\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = \sqrt{6}$ e $\min\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = -\sqrt{6}$.

5. $\|Tf - Tg\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |Tf(x) - Tf(y)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left| \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2y^2} y f(y) dy - \right.$
$\left. - \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2y^2} y g(y) dy \right| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left| \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2y^2} y(f(y) - g(y)) dy \right| \leq$
$\leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2y^2} y|(f(y) - g(y))| dy \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \displaystyle\int_0^1 y|(f(y) - g(y))| dy \leq$
$\leq \left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |(f(y) - g(y))|\right) \left(\displaystyle\int_0^1 y dy\right) = \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^1 \|f - g\|_\infty = \dfrac{1}{2}\|f - g\|_\infty$, dunque T è una contrazione.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 12 (12 Dicembre 2008)

Equazioni differenziali, ripasso

1. (a) $\ddddot{x} - 4x = 0$: il polinomio caratteristico associato all'equazione è $P(\lambda) = \lambda^4 - 4$, che ha come radici $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{2}i$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3 \cos\left(\sqrt{2}t\right) +$ $+ c_4 \sin\left(\sqrt{2}t\right)$.

   (b) $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} - 2\ddddot{x} + \dddot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) =$ $= \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 1 = \left(\lambda^3 - 1\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) =$ $= (\lambda - 1)^3 \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)$, che ha come radici 1 (con molteplicità algebrica 3) e $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, quindi l'integrale generale sarà $x(t) = e^t \, (c_1 +$ $+ c_2 t + c_3 t^2) + e^{-\frac{t}{2}} \left(c_4 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_5 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$.

   (c) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{2t}$: il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$, dunque l'integrale generale dell'omogenea associata è $P(\lambda) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$; a questo punto, cerchiamo una soluzione particolare usando il metodo simpatia, cioè la cerchiamo del tipo ae^{2t}: $x(t) = ae^{2t} \Rightarrow \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) =$ $= -6ae^{2t}$, dunque si ha una soluzione particolare per $a = -\dfrac{1}{6}$; l'integrale generale sarà dunque $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \dfrac{e^{2t}}{6}$.

   (d) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = 4t$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 =$ $= \left(\lambda^2 - 4\right)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)$, quindi l'omogenea associata ha come integrale generale $e^{2t}(c_1 + c_2 t) + c_3 e^{-2t}$; cerchiamo ora una soluzione simile al termine forzante, cioè del tipo $x(t) = at + b$: $\dddot{x}(t) -$ $-2\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 8at + 8b - 4a = 4t \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{4}$, dunque l'integrale generale è $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + c_3 e^{-2t} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}$.

2. (a) $\begin{cases} \dddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$, che ha per radici 0 e ± 1, dunque l'integrale generale è $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3$; imponiamo ora le condizioni iniziali: essendo $\dot{x}(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$ e $\ddot{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, si avrà $\begin{cases} \ddot{x}(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ \dot{x}(0) = c_1 - c_2 = 0 \\ x(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 3 \end{cases}$, che ha per soluzione $(c_1, c_2, c_3) =$ $= (1, 1, 1)$, dunque la soluzione è $x(t) = e^t + e^{-t} + 1$.

(b) $\begin{cases} \dddot{\dot{x}} + 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 =$

$= (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$, dunque ci sono radici complesse multiple e perciò l'integrale generale sarà $c_1 \sin t + c_2 t \sin t + c_3 \cos t + c_4 t \cos t$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dddot{x}(0) = [(-c_1 - 3c_4)\cos x - c_2 t \cos t + (c_3 - 3c_2)\sin t + c_4 t \sin t]_{t=0} = -c_1 - 3c_4 = 1 \\ \ddot{x}(0) = [(-c_1 - 2c_4)\sin t - c_2 t \sin t + (2c_2 - c_3)\cos t - c_4 t \cos t]_{t=0} = 2c_2 - c_3 = 1 \\ \dot{x}(0) = [(c_1 + c_4)\cos t + c_2 t \cos t + (c_2 - c_3)\sin t - c_4 t \sin t]_{t=0} = c_1 + c_4 = 1 \\ x(0) = [c_1 \sin t + c_2 t \sin t + c_3 \cos t + c_4 t \cos t]_{t=0} = c_3 = 1 \end{cases};$$

le soluzioni di questo sistema sono $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 1, 1, -1)$, dunque la soluzione del sistema è $x(t) = (2 + t)\sin t + (1 - t)\cos t$.

(c) $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \sin t \\ \dot{x}(0) = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$, dunque l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$; cerchiamo una soluzione particolare col metodo simpatia: $x(t) = a \cos t + b \sin t \Rightarrow \ddot{x}(t) + 4x(t) = 3a \cos t + 3b \sin t = \sin t \Leftrightarrow a = 0, b = \dfrac{1}{3}$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \dfrac{\sin t}{3}$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \left[-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t) + \frac{\cos t}{3}\right]_{t=0} = 2c_2 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \left[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{\sin t}{3}\right]_{t=0} = c_1 = \frac{3}{2} \end{cases};$$ le soluzioni di questa equazione sono $(c_1, c_2) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, dunque la soluzione è $x(t) = \dfrac{3}{2}\cos(2t) - \dfrac{\sin(2t)}{2} + \dfrac{\sin t}{3}$.

(d) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$, dunque l'omogenea associata ha come soluzione $e^t\left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2\right)$; cerchiamo ora una soluzione particolare con il metodo simpatia, facendo però attenzione al fatto che il termine forzante è soluzione anche dell'omogenea associata, quindi dovremo cercare una soluzione del tipo $x(t) = at^3 e^t$: si ha $\dddot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - x(t) = 6ae^t$, dunque una soluzione particolare si ha per $a = \dfrac{1}{6}$ e l'integrale generale è $e^t\left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dfrac{t^3}{6}\right)$; imponiamo infine le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \ddot{x}(0) = \left[e^t\left((c_1 + c_2 + 2c_3) + (c_2 + 2c_3 + 1)t + \left(c_3 + \frac{1}{2}\right)t^2 + \frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \\ \dot{x}(0) = \left[e^t\left((c_1 + c_2) + (c_2 + 2c_3)t + \left(c_3 + \frac{1}{2}\right)t^2 + \frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1 + c_2 = 3 \\ x(0) = \left[e^t\left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1 = 2 \end{cases};$$

le soluzioni di questo sistema sono $(c_1, c_2, c_3) = (2, 1, -1)$ e quindi la soluzione è $e^t\left(2 + t - t^2 + \dfrac{t^3}{6}\right)$.

3. $\dddot{x} - x = e^{-t}$; cerchiamo innanzi tutto tutte le soluzioni di questa equazione, poi imporremo le condizioni: il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^3 - 1$, che ha come radici 1 e $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, dunque l'omogenea associata ha come soluzioni $c_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x(t) = ae^{-t}$: si ha $\dddot{x} - x = -2ae^{-t}$, dunque una soluzione particolare è $-\dfrac{e^{-t}}{2}$ e l'integrale generale è $c_1 e^t +$ $+ e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \dfrac{e^{-t}}{2}$; imponiamo ora le condizioni: essendo $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \dfrac{e^{-t}}{2} = 0$, si avrà $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$; adesso, imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 0$: $x(0) = \left[e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \dfrac{e^{-t}}{2} \right]_{t=0} = c_1 - \dfrac{1}{2}$, dunque l'altra condizione si ha $\Leftrightarrow c_1 = \dfrac{1}{2}$; riassumendo, le soluzioni dell'equazione differenziale che rispettano le condizioni sono, al variare del parametro reale c_2, le seguenti: $x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\dfrac{1}{2} \cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}t\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \dfrac{e^{-t}}{2}$.

4. (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: la funzione e^{x^2} non ha zeri, dunque non esistono punti di equilibrio; inoltre, è di classe C^1 e dunque la soluzione è sempre unica; cerchiamo ora i tempi di esistenza: essendo $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} e^{-x^2} dx = t$, la variabile t potrà variare tra $\displaystyle\int_{x_0}^{-\infty} e^{-x^2} dx$ e $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, dunque l'intervallo massimale di esistenza è $\left(\Phi(x_0) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \Phi(x_0) + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, ove $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-y^2} dy$.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} (x^3 - x) \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: i punti di equilibrio sono $x_0 = 0$ e $x_0 = \pm 1$; essendo $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 - x\right) \log|x| = \left(3x^2 - 1\right) \log|x| +$ $+ x^2 - 1$, la funzione $\left(x^3 - x\right) \log|x|$ è di classe C^1 in tutti i punti tranne l'origine; nell'origine, invece, il rapporto incrementale tende a $+\infty$ e quindi la funzione non è Lipschitziana e potrebbe esserci un'altra soluzione; tuttavia, si ha $\displaystyle\int_0^x \frac{dy}{(y^3 - y) \log|y|} \approx \int_0^x \frac{dy}{y \log|y|} =$ $= [\log|\log|y||]_0^x = +\infty$, dunque anche in questo caso la soluzione è unica; determiniamo ora l'intervallo di esistenza: abbiamo appena visto che $\displaystyle\int_0^x \frac{dy}{(y^3 - y) \log|y|} = +\infty$, e inoltre dovrà essere anche

$\displaystyle\int_1^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} = \pm\infty$ e $\displaystyle\int_{-1}^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} = \pm\infty$, perché se così non fosse la soluzione non sarebbe più unica intorno a quei punti; dunque, se $x_0 \in (-1,0)\cup(0,1)$ la soluzione è definita per tutti i tempi, altrimenti se $x_0 < -1$ l'intervallo massimale è $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|}, +\infty\right)$ mentre se $x_0 > 1$ l'intervallo è $\left(-\infty, \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|}\right)$; in questi casi la soluzione esplode in tempo finito, rispettivamente per tempi negativi e per tempi positivi, perché $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|} = \int_{x_0}^{-\infty} -\frac{dx}{(x^3-x)\log|x|} \approx \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3\log|x|} <$ $< \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty$.

5. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{x^4+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ è chiaramente differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine; nell'origine, la funzione è continua perché $\left|\dfrac{x^2yz}{x^4+y^2+z^4}\right| = \dfrac{\sqrt{x^4}\sqrt{x^2}|z|}{x^4+y^2+z^4} \leq \dfrac{\sqrt{x^4+y^2+z^4}\sqrt{x^4+y^2+z^4}|z|}{x^4+y^2+z^4} =$ $= |z| \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$, ed è inoltre provvista di derivate parziali identicamente nulle, in quanto la funzione è nulla sui tre assi cartesiani, e ha anche le derivate direzionali (anch'esse nulle) perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(tx,ty,tz)-f(0,0,0)}{t} =$ $= \dfrac{t^4x^2yz}{t\,(t^4x^4+t^2y^2+t^4x^4)} = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{tx^2yz}{t^2x^4+y^2+t^2z^4} = 0$; tuttavia, f non è differenziabile perché la quantità $\dfrac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(x,y,z)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$ $= \dfrac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ lungo la direzione $\left(x,x^2,x\right)$ vale $\dfrac{x^5}{3x^4\sqrt{2x^2+x^4}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} \pm\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

6. $f(x,y) = 3x^5 - 5x^3 + 2y^2$; per trovare i punti critici calcoliamo il gradiente della funzione: $\nabla f(x,y) = \left(15x^4 - 15x^2, 4y\right)$, che si annulla nei punti $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$. Per determinare la natura di questi punti critici calcoliamo la matrice Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 60x^3-30x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, che nei tre punti critici vale rispettivamente $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, dunque il punto $(1,0)$ è di massimo locale e $(-1,0)$ è una sella, mentre sull'origine non possiamo ancora dire nulla: tuttavia, notiamo che in qualsiasi intorno dell'origine esistono punti del tipo $(x,0)$, con $x > 0$, in cui la funzione è positiva, e punti del tipo $(x,0)$ con $x < 0$ in cui la funzione è negativa; dunque, il punto $(0,0)$ non è né un punto di massimo né di minimo locale.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia, Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 1 (25 Settembre 2009)
Limiti e continuità in più variabili

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$: infatti, $0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x|\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ $= |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$: infatti, $0 \le \left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| \le \frac{|x|\left(x^4+y^2\right)}{x^4+y^2} =$ $= |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ non esiste: infatti, se $x=0$ quella quantità vale sempre 0, mentre se $y=x^3$ abbiamo $\lim_{x\to0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0} \frac{1-\cos\rho}{\rho^2} = \frac{1}{2}$

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x^3y|}}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, quindi ci limiteremo a studiare la continuità di f nell'origine: la funzione non è continua anche in questo punto, perché lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante $y=x$ si ha che $f(x,x) = \frac{x^2}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2+1} \overset{x\to0}{\to} 1$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi dall'origine, e lo è anche in $(0,0)$ perché $0 \le \left|\frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}}\right| \le$ $\le \frac{|x|^3|y|}{\sqrt{x^8+y^6}} \le \frac{\left(x^8+y^6\right)^{\frac{3}{8}}\left(x^8+y^6\right)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{x^8+y^6}} = \left(x^8+y^6\right)^{\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^4+y^8} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi dall'origine, e lo è anche in $(0,0)$ perché $0 \le \left|\frac{x^3y^4}{x^4+y^8}\right| \le$ $\le \frac{\left(x^4+y^8\right)^{\frac{3}{4}}\left(x^4+y^8\right)^{\frac{1}{2}}}{x^4+y^8} = \left(x^4+y^8\right)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

3. $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\langle\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right\rangle + \left\langle\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right\rangle = \frac{\langle x+y, x+y\rangle}{4} +$

$$+\frac{\langle x-y,x-y\rangle}{4}=\frac{\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\langle x,y\rangle}{4}+\frac{\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-2\langle x,y\rangle}{4}=\frac{\|x\|^2}{4}+$$
$$=\frac{\|y\|^2}{4}+\frac{\langle x,y\rangle}{2}+\frac{\|x\|^2}{4}+\frac{\|y\|^2}{4}-\frac{\langle x,y\rangle}{2}=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$$

4. $\Rightarrow$ Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$; allora $\forall y \in A$ si ha che $B_\varepsilon(y) \subset A$, in particolare se $y = f(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Poi, se f è continua, allora $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, cioè $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A$, ovvero $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è aperto, essendo x_0 arbitrario.

   $\Leftarrow$ Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$; allora $B_\varepsilon(f(x_0))$ è aperto in $\mathbb{R}^m$ e dunque $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è aperto, cioè $\forall x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ si ha che $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, ma allora $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$, cioè f è continua in x_0, ma essendo x_0 arbitrario, concludiamo che f è continua.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzione del tutorato numero 2 (2 Ottobre 2009)
Limiti e continuità in più variabili

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ non esiste: infatti, ponendo $y=0$ si ha che $\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$, mentre per $y=x$ si ha $\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{(x^2+x^2)^2} = \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4}$.

   (b) $\lim_{|(x,y)|\to\infty} \frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2} = 0$: infatti, $\left|\frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2}\right| \le \frac{1}{x^4+y^2} \le \frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{4}} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} 0$, perché $0 \le \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^4 \ge x^2 - \frac{1}{4}$.

   (c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2} = 0$: infatti, $\left|\frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2}\right| \le \frac{|xyz|}{x^2+y^4+z^2} = \frac{|xz||y|}{x^2+y^4+z^2} \le \frac{x^2+z^2}{2}\frac{|y|}{x^2+y^4+z^2} \le \frac{(x^2+y^4+z^2)|y|}{2(x^2+y^4+z^2)} = \frac{|y|}{2} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0$.

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$: infatti, $\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ $= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos(x-y)$, $\cos(x-y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 1$ e $\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ $= \sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua in tutti i punti diversi dall'origine ma non è continua in $(0,0)$ perché $\lim_{x\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y^4}-1}{2y^4} \overset{y\to 0}{\to} \frac{1}{2}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2y^3)}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è sicuramente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{\arctan(x^2y^3)}{x^6+y^4}\right| \le \frac{x^2|y|^3}{x^6+y^4} = \frac{(x^6)^{\frac{1}{3}}(y^4)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} \le \frac{(x^6+y^4)^{\frac{1}{3}}(x^6+y^4)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} =$ $= (x^6+y^4)^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}}\right| \le$
$$\left|\frac{(x^2+y^4+z^2)(x^4+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x^4+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+y^2+z^2)(x^2+y^4+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right| = (x^2+y^4+z^2)^{\frac{1}{2}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0.$$

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x} & \text{se } x\neq y\\ e^{xy} & \text{se } x=y\end{cases}$ è ovviamente continua all'infuori della bisettrice del primo e terzo quadrante; inoltre, la funzione è continua anche lungo questa retta, perché, per il teorema della media integrale, si ha $\dfrac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x}=e^{z^2}$ per un opportuno $z\in[x,y]$, quindi $\left|\dfrac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x}-e^{xy}\right|=\left|e^{z^2}-e^{xy}\right|\overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to}\left|e^{x_0^2}-e^{x_0^2}\right|=0.$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\dfrac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4}\right|\leq\dfrac{|xy^3|}{x^2+y^2}\dfrac{8}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{8}}}\leq\dfrac{8|xy^3|}{(x^2+y^4)^{\frac{9}{8}}}\leq$ $\leq 8(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{9}{8}}=\dfrac{1}{8}\overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to}0.$

3. Chiaramente la funzione è continua in ogni punto diverso da $(0,\dots,0)$. Nell'origine invece è continua $\Leftrightarrow \alpha_1+\dots+\alpha_n>2\beta$: infatti, in questo caso abbiamo che $0\leq\dfrac{|x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta}=\dfrac{(x_1^2)^{\frac{\alpha_1}{2}}\dots(x_n^2)^{\frac{\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta}\leq$ $\leq\dfrac{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta}=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{2}-\beta}\overset{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)}{\to}0;$ se invece $\alpha_1+\dots+\alpha_n\leq 2\beta$, allora $f(x,\dots,x)=\dfrac{|x|^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{(nx^2)^\beta}=$ $\dfrac{|x|^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-2\beta}}{n^\beta}\overset{x\to0}{\not\to}0.$

4. (a) Se $f\equiv L$ allora f ha ovviamente sia un massimo che un minimo. Supponiamo dunque che f non sia costante: allora $\exists x_0\in\mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0)\neq L$, diciamo $f(x_0)<L$. Sia $x_n\in\mathbb{R}^n$ una successione minimizzante (ovvero una successione tale che $f(x_n)\overset{n\to\infty}{\to}\inf_{\mathbb{R}^n}f$: x_n è una successione limitata, perché se così non fosse esisterebbe una sottosuccessione x_{n_k} tale che $\|x_{n_k}\|\to\infty$ e dunque si avrebbe che $f(x_{n_k})\to L$ mentre sappiamo che $f(x_{n_k})\to\inf_{\mathbb{R}^n}f\leq f(x_0)<L$. Dunque da x_n possiamo estrarre una sottosuccessione x_{n_j} tale che $x_{n_j}\to x\in\mathbb{R}^n$. Siccome f è continua, $f(x_{n_j})\to f(x)$ ma poiché $f(x_{n_j})\to\inf_{\mathbb{R}^n}f$ si ha che $f(x)=\inf_{\mathbb{R}^n}f$. Quindi x è un punto di minimo assoluto di f. In modo analogo si prova che se $f(x_0)>L$ allora f ammette un punto di massimo assoluto.

(b) Poichè $\lim_{\|x\|\to\infty}f(x)=L$ allora $\forall\,\varepsilon>0\ \exists M>0$ tale che $\|x\|\geq M\Rightarrow|f(x)-L|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. In particolare, $\|x\|,\|y\|\geq M\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. Consideriamo ora la palla chiusa $\bar{B}_{M+1}(0)$. Siccome questa palla è compatta, f è uniformemente continua in $\bar{B}_{M+1}(0)$ cioè $\exists\delta$ (che possiamo supporre <1) tale che $x,y\in\bar{B}_{M+1}(0),\|x-y\|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Ma allora $\forall\,x,y\in\mathbb{R}^n$ tali che $\|x-y\|<1$, $x,y\in\overline{B}_{M+1}(0)$ oppure $x,y\notin B_M(0)$

e quindi in ogni caso $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Quindi f è uniformemente continua.

5. $0 < f(x,y) = \dfrac{e^{\cos(x^3)}}{2 + x^2 + y^2 + \arctan(x^4 + y^4)} \leq \dfrac{e}{2} = f(0,0)$, dunque $\max_{\mathbb{R}^2} f = \dfrac{e}{2}$; inoltre, $|f(x,y)| \leq \dfrac{e}{2 + x^2 + y^2} \overset{\|(x,y)\| \to \infty}{\to} 0$ e dunque $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$ (e questo inf non è un minimo perché $f(x,y) > 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 3 (9 Ottobre 2009)
Derivazione in più variabili

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile all'infuori dell'origine. In $(0,0)$ ammette derivate parziali entrambe nulle, perché essendo $f(x,0)=0=f(0,y)\ \forall x,y$, allora $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$ $=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$; inoltre, la funzione ha derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^3hk^2}{t\left(t^2h^2+t^4k^4\right)}=$ $=\lim_{t\to 0^+}\frac{hk^2}{h^2+t^2k^4}=\begin{cases}\frac{k^2}{h} & \text{se } h\neq 0\\ 0 & \text{se } h=0\end{cases}$; tuttavia, la funzione non è differenziabile perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0)-(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=$ $=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk^2}{\left(h^2+k^4\right)\sqrt{h^2+k^2}}$, che va a $+\infty$ se $h=k^2$.

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^8+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è ovviamente differenziabile in $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$. Nell'origine esistono entrambe le derivate parziali, nulle, perché la funzione è nulla lungo gli assi; inoltre, è differenziabile (e ha dunque derivate direzionali) perché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0)-(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{\log\left(1+h^2k^2\right)}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$
$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k^2}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{\left(h^2+k^2\right)\left(h^8+k^2\right)}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$
$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0.$$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ammette derivate parziali entrambe nulle nell'origine, perché $f(0,y)=0;\forall y\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{h}\sin\left(\frac{1}{h^4}\right)=0$; inoltre, f è differenziabile (e dunque ammette derivate direzionali) perché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0)-(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^{\frac{4}{3}}\sin\left(\frac{1}{h^4+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq$$
$$\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{h^2+k^2}h^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt[3]{h}=0.$$

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine, perché $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{e^{h^2}-1}{h^2}-1}{h}=$
$=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2he^{h^2}-2h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2e^{h^2}-2}{3h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{4he^{h^2}}{3}=0$
e analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{\frac{e^{k^2}-1}{k^2}-1}{k}=0$. Inoltre, la funzione è differenziabile (e quindi possiede derivate direzionali) perché
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2}-1}{\rho}=0.$$

(e) $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ ha derivate parziali tutte nulle nell'origine perché nulla lungo gli assi, inoltre è dotata di derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{f(th,tk,tj)-f(0,0,0)}{t}=$
$=\lim_{t\to 0^+}\dfrac{t^2h^2tkt^2j^2}{t\left(t^4h^4+t^4k^4+t^4j^4\right)}=\dfrac{h^2jk^2}{h^4+k^4+j^4}$, ma non é differenziabile perché
$$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)}\frac{h^2kj^2}{\left(h^4+k^4+j^4\right)\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \text{ vale } \pm\frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ se } h=k=j.$$

2. (a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ può essere anch'essa estesa ad una funzione continua nell'origine con $f(0,0)=0$, in quanto $|f(x,y)|\leq\dfrac{\left(x^4+y^2\right)y^2}{x^2+y^4}=$
$=y^2\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$; inoltre, essendo nulla lungo gli assi cartesiani, f possiede anche derivate parziali nell'origine; tuttavia, solamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è continua nell'origine, infatti $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=\left|\dfrac{2x^2y\left(x^2+y^4\right)-4x^2y^5}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right|\leq$
$\leq\dfrac{2x^2|y|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+\dfrac{4x^2|y|^5}{\left(x^2+y^4\right)^2}\leq\dfrac{2|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+$
$+\dfrac{4|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}=6|y|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$, ma $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$
$=\dfrac{2xy^2\left(x^2+y^4\right)-2x^3y^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$ e quest'ultima quantità non è continua perché, calcolata lungo la curva $x=y^2$, vale $\dfrac{4y^8-2y^8}{4y^8}=\dfrac{1}{2}$.

(b) $f(x,y)=\dfrac{x^4y}{x^2+y^6}$ può essere estesa ad una funzione continua anche nell'origine con $f(0,0)=0$, perché $|f(x,y)|\leq\dfrac{x^2|y|\left(x^2+y^6\right)}{x^2+y^6}=$
$=x^2|y|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$; la funzione ammette inoltre derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché $f(x,0)=0=f(0,y)$, mentre negli

altri punti si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y\left(x^2+y^6\right)-2x^5y}{\left(x^2+y^6\right)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$
$= \frac{x^4\left(x^2+y^6\right)-6x^4y^6}{\left(x^2+y^6\right)^2}$, e sono entrambe continue nell'origine perché
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \left|\frac{4x^3y\left(x^2+y^6\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| + \left|\frac{2x^5y}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| \le \frac{4|xy|\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} +$
$+ \frac{2|xy|\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} = 6|xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \left|\frac{x^4\left(x^2+y^6\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| +$
$+ \left|\frac{6x^4y^6}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| \le \frac{x^2\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} + \frac{6y^6\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} = x^2+6y^6 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$;
quindi, la funzione può essere prolungata ad una funzione di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = x^2e^{xy^3}, \gamma(t) = (\cos t, t) \Rightarrow f(\gamma(t)) = \cos^2(t)e^{\cos(t)t^3} \Rightarrow \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) =$
$= -2\sin(t)\cos(t)e^{\cos(t)t^3} + \cos^2(t)\left(3t^2\cos(t) - t^3\sin(t)\right)e^{\cos(t)t^3} =$
$= \left(3t^2\cos^3(t) - t^3\sin(t)\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t)\right)e^{\cos(t)t^3}$. Inoltre, $\nabla f(x,y) =$
$= \left(2xe^{xy^3} + x^2y^3e^{xy^3}, 3x^3y^2e^{xy^3}\right)$, dunque $\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle =$
$= \left\langle \left(2\cos(t)e^{\cos(t)t^3} + \cos^2(t)t^3e^{\cos(t)t^3}, 3\cos^3(t)t^2e^{\cos(t)t^3}\right), (-\sin t, 1)\right\rangle =$
$= -2\sin(t)e^{\cos(t)t^3} - \sin(t)\cos^2(t)t^3e^{\cos(t)t^3} + 3\cos^3(t)t^2e^{\cos(t)t^3} =$
$= \left(3t^2\cos^3(t) - t^3\sin(t)\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t)\right)e^{\cos(t)t^3}$.

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è chiaramente continua, è dotata di tutte le derivate direzionali in quanto $\lim_{t\to0^+} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} =$
   $= \sqrt{h^2+k^2}$, ma non ha derivate parziali perché $\lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{|h|}{h}$ non esiste (e analogamente si dimostra che non esiste neanche l'altra derivata parziale).

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ è chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché $\lim_{t\to0^+} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$
   $= \lim_{t\to0^+} \frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t} = \lim_{t\to0^+} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = +\infty$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ è chiaramente continua nell'origine, ma non ammette derivate parziali perché $\lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \pm\infty$ (analogamente non ha l'altra derivata parziale); inoltre, non possiede alcuna derivata direzionale perché $\lim_{t\to0^+} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t} =$
   $= \lim_{t\to0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}} = +\infty$.

(d) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y)\in A \end{cases}$, ove $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x^2, x\neq 0\}$,

non è continua nell'origine perché $f(x,x^2)=1 \overset{x\to 0}{\not\to} 0$, ammette derivate parziali entrambe nulle perché è nulla lungo gli assi, e ha anche le derivate direzionali perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{0}{t}=0$, dato che per t sufficientemente piccolo si ha $f(tx,ty)=0$.

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt[3]{xy} & \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y)\in A \end{cases}$ ove

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x^2, x\neq 0\}$, è discontinua nell'origine perché $f(x,x^2)=1$, ha derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t}=$

$=\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{hk}{t}}=+\infty$, dato che per t abbastanza piccolo si ha $f(tx,ty)=\sqrt[3]{t^2xy}$.

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y)\in A \end{cases}$, ove

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x^2, x\neq 0\}$, non è continua, perché non lo è lungo la parabola A, non ha le derivate parziali perché lungo gli assi vale rispettivamente $|x|$ e $|y|$, ma ha tutte le derivate direzionali perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t}=\sqrt{h^2+k^2}$, dato che per t opportunamente piccolo si ha $f(tx,ty)=|t|\sqrt{x^2+y^2}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 4 (16 Ottobre 2009)

Massimi e minimi in più variabili

1. (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 4x, 4y - 4y^3\right)$ si annulla se e solo se $x = 0 \vee \pm 1$ e $y = 0 \vee \pm 1$, dunque abbiamo nove punti critici. La matrice Hessiana è $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$, dunque l'origine è un punto di sella perché $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ha due autovalori di segno discorde; analogamente, sono selle anche i quattro punti $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$, perché $H_f(\pm 1, 1) = H_f(\pm, -1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono invece due punti di minimo locale, perché $H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ è strettamente definita positiva, mentre $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di massimo perché $H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ ha entrambi gli autovalori negativi.

   (b) $f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 1\right)$: $\nabla f(x,y) = \left(y\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 2x^2 y, x\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 2xy^2\right) = \left(y\left(3x^2 + y^2 - 1\right), x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right)\right)$ si annulla in $(0,0)$, quando $y = 0 = x^2 + 3y^2 - 1$ (cioé in $(\pm 2, 0)$), quando $x = 0 = 3x^2 + y^2 - 1$ (cioé in $(0, \pm 2)$), e quando $x^2 + 3y^2 - 1 = 0 = 3x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cioé in $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$). $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 3y^2 - 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \end{pmatrix}$, quindi l'origine, $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$ sono punti di sella perché $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $H_f(\pm 2, 0) = H_f(0, \pm 2) = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$ hanno determinante negativo. I punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ sono di minimo relativo perché $H_f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ha determinante e traccia positiva, mentre $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ sono di massimo relativo in quanto $H_f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ha traccia negativa e determinante positivo.

   (c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$: $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 3y^2, -6xy\right)$ si annulla solo in $(0,0)$: la matrice Hessiana $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 6x \end{pmatrix}$ è identicamente nulla nell'origine, quindi non ci dà informazioni: tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che $f(0,0) = 0$ e in ogni intorno dell'origine ci sono sia punti in cui la funzione assume valori positivi (ad esempio, $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3}$) sia punti in cui assume valori negativi (ad esempio, $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=-\frac{2}{n^3}$), e dunque l'origine non può essere né un punto di massimo né di minimo relativo.

(d) $f(x,y)=x^4-x^3\sin y$: $\nabla f(x,y)=\left(4x^3-3x^2\sin y,-x^3\cos y\right)$ si annulla in tutti i punti in cui $x=0$ e in quelli in cui $\cos y=0$ e $x=\frac{3}{4}\sin y$, ovvero nei punti del tipo $\left(\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\pi 2k\pi\right)$. $H_f(x,y)=$ $=\begin{pmatrix} 12x^2-6x\sin y & -3x^2\cos y \\ -3x^2\cos y & x^3\sin y \end{pmatrix}$, dunque i punti $\left(\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$ sono dei minimi perché $H_f\left(\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=$ $=H_f\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)=\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{27}{64} \end{pmatrix}$, mentre $H_f(0,y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non ci dà informazioni. Tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che intorno a ogni punto dell'asse y ci sono sia punti in cui la funzione è positiva sia punti in cui è negativa, dunque sono tutti punti di sella.

(e) $f(x,y,z)=\sin(xyz)$: $\nabla f(x,y)=(yz\cos(xyz),xz\cos(xyz),xy\cos(xyz))$ si annulla in tutti i punti in cui due delle tre coordinate sono nulle e in quelli in cui $xyz=\frac{\pi}{2}+k\pi$: i punti del primo tipo sono tutti di sella perché intorno ad ogni punto per cui $xyz=0$ ci sono punti in cui $xyz>0$ (e dunque $\sin(xyz)>0$) e altri in cui in cui $xyz>0$ (e dunque $\sin(xyz)>0$); i punti in cui $xyz=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ sono tutti di massimo assoluto, perché $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1\geq\sin(xyz)\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, e dunque in particolare sono di minimo relativo; analogamente, i punti dove $xyz=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ sono di minimo relativo perché $\sin(xyz)\geq$ $\geq -1=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$.

2. (a) $f(x,y)=x^4-2x^2+y^2$: sicuramente $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$, perché $f(0,y)=$ $=y^2\overset{y\to+\infty}{\to}+\infty$; inoltre, $f(x,y)=x^4-2x^2+1+y^2-1=\left(x^2-1\right)^2+$ $+y^2-1\geq -1$ e $f(\pm1,0)=-1$, dunque $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=\min\limits_{\mathbb{R}^2} f=-1$.

(b) $f(x,y)=\frac{1}{x^4+y^2+2y+2}$: sicuramente $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=0$, perché $f(x,y)=$ $=\frac{1}{x^4+(y+1)^2+1}>0\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e $f(x,0)=\frac{1}{x^4+2}\overset{x\to+\infty}{\to}0$; inoltre, $f(x,y)=\frac{1}{x^4+(y+1)^2+1}\leq 1$ e $f(0,-1)=-1$, dunque $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=$ $=\max\limits_{\mathbb{R}^2} f=1$.

3. (a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua nell'origine perché

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leq\frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}+\frac{|y|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=$$

$= |x| + |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$. Inoltre ha entrambe le derivate perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$;
ha anche le derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3h^3+t^3k^3}{t\left(t^2h^2+t^2k^2\right)} = \frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}$, ma non è differenziabile perché
$\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^3+k^3-(h+k)\left(h^2+k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}$ non
va a 0, in quanto se $h = k$ vale $\frac{-2x^3}{2x^2\sqrt{2}|x|} \overset{x\to 0}{\to} \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0) \end{cases}$ ha derivate parziali tutte e tre nulle perché è nulla lungo gli assi, inoltre è differenziabile (e dunque continua e derivabile in ogni direzione) perché
$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left|\frac{f(h,k,j)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(h,k,j)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\right| =$
$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \frac{|hjk|}{h^2+k^2+j^2} \leq \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \frac{|h|\sqrt{h^2+j^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2+j^2}}{h^2+k^2+j^2} =$
$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} |h| = 0$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$: essendo la funzione nulla lungo gli assi cartesiani, si avrà $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mentre nei punti diversi dall'origine si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y\left(x^2+y^4\right)-2x^4y}{\left(x^2+y^4\right)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3\left(x^2+y^4\right)-4x^3y^4}{\left(x^2+y^4\right)^2}$, che sono entrambe continue nell'origine, perché $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{3x^2y\left(x^2+y^4\right)-2x^4y}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right| \leq$
$\leq \frac{3x^2|y|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} + \frac{2x^4|y|}{\left(x^2+y^4\right)^2} \leq \frac{3|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} + \frac{2|y|\left(x^2+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^4\right)^2} =$
$= 5|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x^3\left(x^2+y^4\right)-4x^3y^4}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right| \leq \frac{|x|^3\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} +$
$+ \frac{4x^3|y|^4}{\left(x^2+y^4\right)^2} \leq \frac{|x|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} + \frac{4\left(x^2+y^4\right)|x|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} = 5|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$;
dunque,
$f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Mostriamo ora che f non è di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$: se per assurdo lo fosse, per il lemma di Schwartz dovrebbe essere $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, e quindi in particolare anche nell'origine; invece, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$
$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$ ma $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4 x} = 1.$$

5. Per la regola di derivazione di funzioni composte, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$
$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right), \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right\rangle$, ma $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho}$,
dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Analogamente, essendo $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}$, si ha che
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right), \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right\rangle =$
$= \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 5 (23 Ottobre 2009)
Massimi e minimi, formula di Taylor, integrali con parametro

1. (a) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2-2x^2y^2$: $\nabla f(x,y)=\big(4x^3-4x-4xy^2, 4y^3-4y-4x^2y\big)$ si annulla se e solo se $4x\left(x^2-y^2-1\right)=0=4y\left(y^2-x^2-1\right)$, dunque in $(0,0)$, $(\pm1,0)$ e $(0,\pm1)$. Essendo $H_f(x,y)= = \begin{pmatrix} 12x^2-4y^2-4 & -8xy \\ -8xy & 12y^2-4x^2-4 \end{pmatrix}$, abbiamo che $H_f(0,0)= = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo locale, mentre $H_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $H_f(0,\pm1)=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, dunque gli altri quattro punti sono tutti di sella.

   (b) $f(x,y)=(x+y)^2(y-2)$: $\nabla f(x,y)=(2(x+y)(y-2),(x+y)(x+ +3y-4))$ si annulla in tutti e soli i punti della forma $(x,-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Studiando il segno della funzione ricaviamo che $f(x,-x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, e che se $x<-2$ intorno a $(x,-x)$ la funzione ha segno positivo, dunque i punti stazionari in cui $x<-2$ sono di massimo; analogamente, se $x>-2$ la funzione assume valori negativi intorno a $(x,-x)$ e pertanto questi sono tutti punti di minimo; infine, il punto $(-2,2)$ è una sella perchè in qualsiasi suo intorno la funzione cambia segno.

   (c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-x^2y^2$: $\nabla f(x,y,z)=\big(2x-2xy^2,2y-2x^2y,2z\big)$ si annulla in $(0,0,0)$, $(\pm1,1,0)$ e $(\pm1,-1,0)$. La matrice Hessiana è $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2-2y^2 & -4xy & 0 \\ -4xy & 2-2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dunque $H_f(0,0,0)= = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva e quindi l'origine è un massimo, mentre $H_f(\pm1,\pm1,0)=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha per autovalori 2 e ±4 e quindi i punti $(1,1,0)$ e $(-1,-1,0)$ sono selle; infine $H_f(\pm1,\mp1,0)= = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha anch'essa per autovalori 2 e ±4 e dunque anche questi due punti sono di sella.

   (d) $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1 e^{\left(x^2+y^2\right)t^2}dt$: fissato $t\in\mathbb{R}$, la funzione $e^{\left(x^2+y^2\right)t^2}$ è di classe C^1, dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato ho che $\nabla f(x,y)=\left(\displaystyle\int_0^1 2xt^2e^{\left(x^2+y^2\right)t^2}dt,\int_0^1 2yt^2e^{\left(x^2+y^2\right)t^2}dt\right)$; pertanto, essendo $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{\left(x^2+y^2\right)t^2}dt>0$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'unico punto stazionario è

l'origine. Inoltre, essendo $f(x,y) = \int_0^1 e^{\left(x^2+y^2\right)t^2} dt \geq \int_0^1 1dt = 1 =$
$= f(0,0)$, il punto $(0,0)$ è di minimo.

2. Notiamo innanzi tutto che $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq \left(x^2-1\right)^2\right\}$, dunque la funzione è sempre positiva all'interno dell'insieme e nulla sul bordo, dunque $\min_A f = f|_{\partial A} = 0$; inoltre, essendo f continua e A compatto, la funzione ammette sicuramente massimo su questo insieme, ma per quanto detto in precedenza il massimo sarà raggiunto all'interno di A, e dunque in un punto stazionario. $\nabla f(x,y) = \left(4x^4 - 4x, 2y\right)$ si annulla in $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$, ma l'unico di questi tre punti che si trova all'interno di A è l'origine, quindi $\max_A f = f(0,0) = 1$.

3. (a) $f(x,y) = e^{x^2-y}$: $\nabla f(x,y) = \left(2xe^{x^2-y}, -e^{x^2-y}\right)$, $H_f(x,y) =$
$= \begin{pmatrix} \left(4x^2+2\right)e^{x^2-y} & -2xe^{x^2-y} \\ -2xe^{x^2-y} & e^{x^2-y} \end{pmatrix}$, dunque $f(x,y) = f(0,0) +$
$+ \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle + \frac{1}{2}\langle (x,y), H_f(0,0)(x,y) \rangle + o\left(x^2+y^2\right) =$
$= 1 + \langle (0,-1), (x,y) \rangle + \frac{1}{2}\left\langle (x,y), \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(x,y) \right\rangle + o(x^2+y^2) =$
$= 1 - y - x^2 + \frac{y^2}{2} + o\left(x^2+y^2\right)$.

   (b) $f(x,y) = \arctan(x+y)$: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{(x+y)^2+1}, \frac{1}{(x+y)^2+1}\right)$,
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} & \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} \\ \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} & \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} \end{pmatrix}$, dunque $\nabla f(0,0) = (1,1)$ e
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $f(x,y) = x + y + o\left(x^2+y^2\right)$.

4. (a) Posta $G(y,z) = \int_z^y \sin\left(x^2\right) dx$ e $\gamma(t) = \left(t^4, t^2\right)$, abbiamo che $f(t) =$
$= G(\gamma(t))$, dunque $f'(t) = \langle \nabla G(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$, ma per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che $\nabla G(y,z) = \left(\sin\left(y^2\right), -\sin\left(z^2\right)\right)$, dunque $f'(t) = \left\langle \left(\sin\left(t^4\right), -\sin\left(t^8\right)\right), \left(4t^3, 2t\right) \right\rangle = 4t^3 \sin\left(t^4\right) - 2t\sin\left(t^8\right)$.

   (b) Posta $G(y,z,w) = \int_z^y e^{-x^2w} dx$ e $\gamma(t) = \left(t^3, t, t^2\right)$, abbiamo che $f(t) =$
$= G(\gamma(t))$, dunque $f'(t) = \langle \nabla G(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$; inoltre, $\frac{\partial}{\partial w} e^{-x^2w} = -x^2 e^{-x^2w}$ esiste per ogni w fissato, e per $w \in [w_0 - \delta, w_0 + \delta]$ ho che $\left| \int_z^y -x^2 e^{-x^2w} dx \right| \leq$
$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2(|w_0|+\delta)} dx < +\infty$, dunque posso derivare sotto il segno di integrale e quindi $\nabla G(y,z,w) = \left(e^{y^2w}, -e^{z^2w}, \int_z^y -x^2 e^{x^2w} dx\right)$;
pertanto, $f'(t) = \left\langle \left(e^{t^8}, -e^{t^4}, \int_t^{t^3} e^{-t^2x^2} dx\right), \left(3t^2, 1, 2t\right) \right\rangle = 3t^2 e^{t^8} -$

$$-e^{t^4}+2t\int_t^{t^3} e^{-t^2x^2}dx.$$

5. $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}dx.$

   (a) Notiamo innanzi tutto che $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{x(1-t)}-1}{x}dx$, dunque l'integranda non ha un asintoto nell'origine per nessun valore di t, in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{e^{x(1-t)}-1}{x}=1-t$, quindi la convergenza dell'integrale dipenderà solamente dal comportamento all'infinito dell'integranda: sicuramente per $t<0$ la funzione non è definita perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}dx=+\infty$, se $t>0$ l'integrale converge perché ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$ e in $t=0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}$ e dunque diverge; quindi, l'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$.

   (b) Innanzi tutto, f è continua perché se $t\in[\tau,+\infty)$, allora $|f(t)|\leq$ $\leq\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-\tau x}-e^{-x}}{x}\right|dx<+\infty$ e dunque c'è equidominatezza e si può applicare il teorema di continuità sotto integrale. Inoltre, $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}=-e^{-tx}$ e quindi per $t\in[\tau,+\infty)$ abbiamo che $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}-e^{-tx}dx\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|e^{-\tau x}\right|dx<+\infty$, quindi la funzione è C^1 e $f'(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-e^{-tx}dx=\left[\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{t}.$

   (c) $f(t)-f(1)=\displaystyle\int_1^t f'(s)ds=\int_1^t-\frac{ds}{s}=-\log t$, ma essendo $f(1)=$ $=\displaystyle\int_0^{+\infty}0dx=0$, ho che $f(t)=-\log t$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 6 (30 Ottobre 2009)

Serie di potenze, ripasso

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}x^n$: il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n}\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{e}$; studiamo ora la convergenza ai bordi dell'intervallo: per $x=\frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ che diverge e per $x=-\frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ che converge, dunque l'intervallo di convergenza è $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^{10}}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^{10}}\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^{10}}}=1}$; ai bordi dell'intervallo ottengo per $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{10}}$ e per $x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$, che convergono entrambe, dunque l'intervallo di convergenza è $[-1,1]$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}x^n$: il raggio di convergenza è $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^n}{n!}}{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}} =$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e} = \infty$,dunque la serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n}x^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{\pi^n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}} = 0$, quindi la serie converge solo in $x=0$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n}\right)^n x^n$: il raggio è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{\cos n}{n}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{|\cos n|}{n}} = \infty$, dunque la serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n x^n$: il raggio è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^n\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|} = 1$, dunque l'intervallo di convergenza è $(-1,1)$ perché ai bordi dell'intervallo di convergenza le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$ non convergono perché il termine n-esimo

non tende a 0.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n(n+2)}$: posto $y=x^2$ otteniamo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{2^n(n+2)}$, il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n(n+2)}}}=2$. Per $y=2$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ che converge, dunque ho convergenza per $0\le x^2\le 2$, ovvero per $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+4^n}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+4^n}}}=$
$=\frac{1}{\frac{1}{4}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}}}=4$; l'intervallo di convergenza è $(-4,4)$, perchè sul bordo dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n+4^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{3^n+4^n}$ che non sono infinitesime.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$: il raggio di convergenza è $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n}=$
$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$; ai bordi dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$, che non convergono perché il termine n-esimo non tende a 0, in quanto $\frac{n!}{n^n}e^n\approx\sqrt{2\pi n}\overset{n\to\infty}{\to}\infty$; dunque, l'intervallo di convergenza è $(-e,e)$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)x^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\cos\left(e^{-n}\right)}}=$
$=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-2n}}{2}+o(e^{-3n})}}=\frac{1}{e^{-2}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}+o(e^{-n})}}=e^2$; ai bordi dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)e^{2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)e^{2n}$, che non sono infinitesime perché $\frac{\cos\left(e^{-n}\right)-1}{e^{-2n}}\overset{n\to\infty}{\to}-\frac{1}{2}$; dunque, l'intervallo di convergenza è $\left(-e^2,e^2\right)$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4\log n}}{x^n}$: posto $y=\frac{1}{x}$, ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}n^{4\log n}y^n$ il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{4\log n}}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}n^{\frac{4\log n}{n}}}=$
$=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}e^{\log\left(n^{\frac{4\log n}{n}}\right)}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}e^{\frac{4\log^2 n}{n}}}=1$; agli estremi

del dominio ho $\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\log n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{4\log n}$ che non convergono perché il termine n-esimo non va a 0; dunque, la serie converge per $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$: essendo e^{-t^2} una funzione decrescente, ho che $e^{-\sqrt{n}^2} \leq \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq e^{-(\sqrt{n}-1)^2}$, e quindi $e = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{-n+2\sqrt{n}-1}{n}}} =$ $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n+2\sqrt{n}-1}}} \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt}} \leq$ $\leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n}}} = e$, dunque la serie ha raggio di convergenza e; agli estremi dell'intervallo non c'è convergenza perché se serie corrispondenti non sono infinitesime in quanto $e^n \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \geq$ $\geq e^n e^{-n} = 1$; dunque, l'intervallo di convergenza è $(-e,e)$.

2. $\lim_{x^2+y^2\to 0}\frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}$ e $\lim_{x^2+y^2\to\infty}\frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}$ sono entrambi 0, perché $\left|\frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}\right| \leq$ $\leq \frac{x^2|y|^3}{x^2+y^6} \leq |y|^3 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$, e inoltre $\left|\frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}\right| \leq \frac{1}{x^2+y^6} \overset{|(x,y)|\to\infty}{\to} 0$.

3. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^{\frac{6}{7}} z}{x^4+y^4+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine; inoltre, nell'origine è continua perché $\left|\frac{h^2k^{\frac{6}{7}}j}{h^4+k^4+j^2}\right| = \frac{\left(h^4\right)^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{6}{7}}\left(j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{h^4+k^4+j^2} \leq \frac{\left(h^4+k^4+j^2\right)^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{6}{7}}\left(h^4+k^4+j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{h^4+k^4+j^2} =$ $= |k|^{\frac{6}{7}} \overset{(h,k,j)\to(0,0,0)}{\to} 0$, ha le derivate direzionali tutte e tre nulle perché è nulla lungo gli assi, ha anche tutte le derivate direzionali, anch'esse nulle, perché $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk,tj)-f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\frac{27}{7}}h^2k^{\frac{6}{7}}j}{t^5h^4+t^5k^4+t^3j^2} =$ $= \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{6}{7}}\frac{h^2k^{\frac{6}{7}}j}{t^2h^4+t^2k^4+j^2} = 0\ \forall(h,j,k)\in\mathbb{R}^3$; tuttavia, la funzione non è differenziabile perché la quantità $\frac{f(h,k,j)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(h,k,j)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}} =$ $= \frac{h^2k^{\frac{6}{7}}j}{\left(h^4+k^4+j^2\right)\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$, se calcolata lungo la direzione $\left(h,h,h^2\right)$, vale $\frac{h^{\frac{34}{7}}}{3h^4\sqrt{2h^2+h^4}} = \pm\frac{h^{-\frac{1}{7}}}{3\sqrt{2+h^2}} \overset{h\to 0}{\to} \pm\infty$.

4. $f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)^2\left(y-x^2\right)$: $\nabla f(x,y) = \Big(4x\left(x^2-y^2\right)\left(y-x^2\right) - 2x\left(x^2-y^2\right)^2,$ $-4y\left(x^2-y^2\right)\left(y-x^2\right)+\left(x^2-y^2\right)^2\Big) = \left(2x\left(x^2-y^2\right)\left(2\left(y-x^2\right)-\left(x^2-y^2\right)\right),\right.$ $\left.\left(x^2-y^2\right)\left(-4y\left(y-x^2\right)+\left(x^2-y^2\right)\right)\right)$ si annulla in tutti i punti tali che

$x^2 = y^2$ e in quelli in cui $2x\left(2\left(y-x^2\right)-\left(x^2-y^2\right)\right)=0=-4y\left(y-x^2\right)+$ $+\left(x^2-y^2\right)$: se $x=0$, nell'altra equazione troviamo $y=0$, ma abbiamo già contato l'origine all'interno dei punti in cui $x^2=y^2$; altrimenti, abbiamo che $2\left(y-x^2\right)=x^2-y^2=4y\left(y-x^2\right)$, ovvero $y=\frac{1}{2}$ e $x=\pm\sqrt{\frac{5}{12}}$, perché se fosse $y-x^2=0$ avremmo anche $x^2-y^2=0$, caso che abbiamo già considerato. Studiando il segno della funzione notiamo che i punti appartenenti alle rette $y=x$ e $y=-x$ con $0<y<1$ sono di minimo, perché in quei punti la funzione si annulla mentre intorno è positiva, mentre i punti delle due rette tali che $y\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ sono di massimo perché la funzione è negativa in ogni intorno e i punti $(0,0)$ e $(\pm 1,1)$ sono selle perché la funzione cambia segno; per quanto riguarda i punti $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{12}},\frac{1}{2}\right)$, notiamo che gli insiemi $\left\{x\geq y\geq x^2\right\}$ e $\left\{-x\geq y\geq x^2\right\}$ sono dei compatti in cui la funzione è nulla sul bordo e positiva all'interno, pertanto essendo questi due gli unici punti stazionari rispettivamente del primo e del secondo insieme, saranno entrambi di massimo.

5. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\overset{n\to\infty}{\to}0$, perché $f_n(0)=0$ e se $x\neq 0$ allora $f_n(x)\leq\frac{nx}{n^2x^2}=$ $=\frac{1}{nx}\to 0$. Per studiare la convergenza uniforme, calcoliamo innanzi tutto $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$: $f_n'(x)=\frac{n-n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$ si annulla in $x=\pm\frac{1}{n}$ e $f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\pm\frac{1}{2}$, dunque essendo $\lim_{x\to\pm\infty}f_n(x)=0$ ho che $\sup_{x\in\mathbb{R}}f_n(x)=\frac{1}{2}$ e quindi la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$. Tuttavia, c'è convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$, perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f_n(x)|\leq$ $\leq\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\frac{1}{|nx|}=\frac{1}{n\delta}\to 0$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 7 (13 Novembre 2009)
Successioni di funzioni, serie di funzioni

1. (a) $f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, e dunque la convergenza non può essere uniforme, perché le f_n sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ mentre la funzione limite non lo è. Tuttavia, la convergenza è uniforme in ogni insieme del tipo $(-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$, perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \frac{1}{nx^2} = \frac{1}{n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]} \overset{n\to\infty}{0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; per stabilire se la convergenza è uniforme calcoliamo $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$, che per la disparità delle f_n sarà uguale a $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$, ma essendo $f_n(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ questo sup sarà raggiunto in un punto stazionario di f_n: $f_n'(x) = = \frac{n^2-x^2}{\left(x^2+n^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm n$, dunque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{1}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e dunque la convergenza non può essere uniforme, perché le f_n sono continue su tutto $\mathbb{R}$ (perché $\frac{\sin(nx)}{nx} \overset{x\to 0}{\to} 1$ mentre la funzione limite non è continua; tuttavia, la convergenza è uniforme su $(-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$, perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \frac{1}{n|x|} = \frac{1}{n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (e) $f_n(x) = \cos^n x \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$: essendo le f_n periodiche, per studiare la convergenza uniforme ci si può restringere all'intervallo $[0,2\pi]$: sicuramente la convergenza non è uniforme su tutto l'intervallo, perché non c'è convergenza puntuale in $x = \pi$ e la funzione limite è discontinua a differenza delle f_n, ma lo è in $[\delta,\pi-\delta] \cup [\pi+\delta,2\pi-\delta]$ $\forall \delta > 0$, perché $\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]\cup[\pi+\delta,2\pi-\delta]} |f_n(x)| = \cos^n \delta \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (f) $f_n(x) = \frac{\sin\left(n^2x^2\right)}{n^2x^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\sin 1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$, tuttavia,

c'è convergenza uniforme su $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f_n(x)|\le\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\frac{1}{n^2x^2+1}=\frac{1}{n^2\delta^2+1}\overset{n\to\infty}{\to}0.$$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx^2}$ è una serie geometrica di ragione e^{-x^2} e dunque converge $\Leftrightarrow e^{-x^2}<1$, cioè $\forall x\neq0$; la convergenza non è uniforme (e dunque neanche totale) perché non c'è convergenza puntuale sul bordo del dominio, ma è totale (e dunque uniforme) su $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|e^{-nx^2}|=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\delta^2}<+\infty$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$, e dunque puntualmente e uniformemente, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}<+\infty$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2x^2+1}$ converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, perché per $x=0$ è una somma di zeri e per $x\neq0$ ha lo stesso andamento di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, ma la convergenza non è totale perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{n^2x^2+1}\right|\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}=$ $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty$; la convergenza non è neanche uniforme perché la successione delle somme parziali non è Cauchy-uniforme: infatti, $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{2N}\frac{x}{n^2x^2+1}\right|\ge\sum_{n=N}^{2N}\frac{\frac{1}{2N}}{n^2\left(\frac{1}{2N}\right)^2+1}\ge\sum_{n=N}^{2N}\frac{\frac{1}{2N}}{(2N)^2\left(\frac{1}{2N}\right)^2+1}=$ $\displaystyle=\sum_{n=N}^{2N}\frac{1}{4N}=\frac{1}{2}\overset{N\to\infty}{\not\to}0$. Tuttavia, c'è convergenza totale e uniforme in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{x}{n^2x^2+1}\right|\le$ $\displaystyle\le\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{x}{n^2x^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\delta}<+\infty$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{\log n+\log(\log n)}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\log\left(x^{\log n+\log(\log n)}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{(\log n+\log(\log n))\log x}=$ $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\log(n\log n)}\right)^{\log x}=\sum_{n=1}^{\infty}(n\log n)^{\log x}$, dunque converge $\Leftrightarrow\log x<$ $<-1\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$, perché per il criterio di condensazione di Cauchy la serie ha lo stesso andamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n(2^n\log(2^n))^{\log x}=$

$= \log 2^{\log x} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x} 2^{n(1+\log x)}$; la convergenza non è uniforme (né totale) perché la serie non converge per $x = \frac{1}{e}$, ma è totale in $\left(0, \frac{1}{e} - \delta\right]$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \left(0, \frac{1}{e}-\delta\right]} \left|(n \log n)^{\log x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} (n \log n)^{\log\left(\frac{1}{e}-\delta\right)} < +\infty$

3. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme in $[-1,1]$ perché $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{e^{-\frac{x^2}{n}} - 1}{1+x^2}\right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \left|e^{-\frac{x^2}{n}} - 1\right| = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, e dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato è possibile scambiare limite e integrale: $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx =$
$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre $\left|\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2}\right| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-x^2}$ che è integrabile e dunque c'è equidominatezza; inoltre, la convergenza è uniforme in $[-b,-a] \cup [a,b]$ $\forall b > a > 0$, perché $\sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left|\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2}\right| \leq$
$\leq \sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left|e^{-nx^2}\right| = e^{-na^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque è possibile scambiare limite e integrale su $[0,+\infty)$ e su $(-\infty, 0]$, e quindi $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx =$
$= \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx +$
$+ \int_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx = \int_{0}^{+\infty} 0 dx + \int_{-\infty}^{0} 0 dx = 0.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[0,1]$, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} < +\infty$, dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato è possibile scambiare serie e integrale: $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n} dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi n x)}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi n x)}{4\pi n}\right]_0^1 =$
$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x}$ converge totalmente in $[0,+\infty)$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\log n}{2^n n^x}\right| \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} < +\infty$, dunque essendo la serie a termini positivi è possibile scambiare serie e integrale: $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\log n}{2^n n^x} dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \int_0^{+\infty} e^{-x \log n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \left[-\frac{1}{\log n} e^{-x \log n} \right]_0^{+\infty} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \frac{1}{\log n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$

4. $f_n(x) = xe^{-2n^2x^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; per stabilire se la convergenza è uniforme calcoliamo $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$, che per la disparità di f sarà uguale a $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$; inoltre, essendo $f_n(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$, verrà raggiunto in un punto in cui f_n' si annulla: $f_n' = \left(1 - 4x^2n^2\right) e^{-2n^2x^2} =$ $= 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2n}$, dunque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{en}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e cioè $f_n \to 0$ uniformemente. Per quanto riguarda invece f_n', ho che $f_n'(x) =$ $= \left(1 - 4x^2n^2\right) e^{-2n^2x^2} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, e dunque non può convergere uniformemente perché passando al limite ho perso la continuità; di conseguenza ho che $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = (0)' = 0$, e quindi l'uguaglianza vale $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2}$ converge totalmente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{n^2} <$ $< +\infty$, dunque c'è anche convergenza uniforme e convergenza puntuale in ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè la funzione è ben definita; inoltre, essendo $S_N(x) =$ $= \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2}$ una successione di funzioni continue (somme finite di funzioni continue), grazie alla convergenza uniforme ho che la continuità è mantenuta passando al $\lim_{N\to\infty}$, e cioè anche f è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, ho che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n}$ converge totalmente su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \ \forall\delta > 0$, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \frac{e^{-n^2x^2}}{n} \right| =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\delta^2}}{n} < \infty$; dunque, f è derivabile in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \ \forall\delta > 0$ e quindi anche in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty$; in $x = 0$ invece non è possibile applicare il teorema di derivazione per serie di funzioni perchè la serie delle derivate non converge (è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), e infatti la funzione non è derivabile perché $f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2x} \geq$

$$\geq \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N}\lim_{x\to 0}\frac{ne^{-n^2x^2}}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geq$$

$\geq M$ $\forall M > 0$ e quindi $f'(0) = +\infty$, cioè f non è derivabile in 0.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 8 (20 Novembre 2009)
Serie di potenze, serie di Taylor, serie complesse

1. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{3}\right)} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}.$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(-x^4\right)^n =$
   $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{4n}.$

   (c) $f(x) = x\cosh\left(x^2\right) = x\dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}}{2} = \dfrac{x}{2}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right) =$
   $= \dfrac{x}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(2n)!}.$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt = \int_0^x dt\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \int_0^x\frac{dt}{1-t} = \log(1-x).$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n+1} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^{2n} = \frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} =$
   $= \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x^2}{2}\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} = \dfrac{x^3}{\left(x^2-1\right)^2}.$

3. (a) $\log(-3) = \log|-3| + i\arg(-3) = \log 3 + i\pi + 2k\pi i.$

   (b) $\log\left(\sqrt{3}+i^3\right) = \log\left(\sqrt{3}-i\right) = \log\left|\sqrt{3}-i\right| + i\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \log 2 + \dfrac{11}{6}\pi i + 2k\pi i$

   (c) $\log\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\pi^n}{n!}\right) = \log(\exp(i\pi)) = i\pi + 2k\pi i.$

   (d) $i^i = \exp(i\log i) = \exp\left(i\left(\dfrac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)\right) = \exp\left(i^2\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi i^2\right) = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}.$

4. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{i^n n^2}$: il raggio di convergenza della serie è $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{i^n}\right|}} =$
   $= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}1} = 1$, e c'è convergenza anche su tutti i punti del bordo perché se $|z| = 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{i^n n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{n!}z^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$ perché usando il criterio del rapporto otteniamo che $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(i-1)^n}{n!}}{\frac{(i-1)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(i-1)^n}{(i-1)^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{i-1}\right| = \infty.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(in)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{e^{-n}-e^n}{2}z^n$, dunque il raggio di convergenza è $\displaystyle\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n-e^{-n}}{2}}}=\frac{1}{e\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1-e^{-2n}}{2}}}=\frac{1}{e}$; ai bordi del disco la serie diverge perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, $|z|=\dfrac{1}{e}\Rightarrow|\sin(in)z^n|=\dfrac{e^n-e^{-n}}{2e^n}\overset{n\to\infty}{\to}\dfrac{1}{2}$.

5. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{nx^4+n^3}$ converge totalmente (e dunque puntualmente e uniformemente) su tutto $\mathbb{R}$ perché $\displaystyle\frac{d}{dx}\frac{x^2}{nx^4+n^3}=\frac{2nx\left(n^2-x^4\right)}{\left(nx^4+n^3\right)^2}$ si annulla in $x=0$ e $x=\pm\sqrt{n}$; dunque, poiché $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{nx^4+n^3}=0$, ho che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x^2}{nx^4+n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2}{n\left(\sqrt{n}\right)^4+n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ converge totalmente su $[-M,M]$ $\forall M>0$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{M}{n}\right)}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}<+\infty$, dunque la convergenza è anche uniforme su $[-M,M]$ e quindi puntuale su $\mathbb{R}$, ma non è uniforme (né totale) perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|\ge$
$\displaystyle\ge\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{2N-1}{n}\right)}{n}\ge\arctan 1\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{n}\ge\frac{\pi}{4}\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{2N}=\frac{\pi}{8}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^x x^n$ converge puntualmente in $(-1,1)$ perché usando il criterio della radice n-esima ottengo che $\sqrt[n]{|(-1)^n n^x x^n|}=|x|$, e in $x=\pm1$ le serie corrispondenti sono $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ che non convergono; la convergenza non può essere uniforme né totale perché non c'è convergenza sul bordo dell'intervallo, ma è totale e uniforme in $[-1+\delta,1-\delta]$ $\forall\delta\in(0,1)$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}|(-1)^n n^x x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\delta}(1-\delta)^n<+\infty$.

6. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{ne^x\arctan(nx)}{n^2x^2+1}dx\overset{(y=nx)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan y}{y^2+1}dy$: l'intervallo di integrazione è limitato, e l'integranda converge uniformemente a $\dfrac{\arctan y}{y^2+1}$, perché $\displaystyle\sup_{y\in[0,1]}\left|\frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan y}{y^2+1}-\frac{\arctan y}{y^2+1}\right|=\sup_{y\in[0,1]}\frac{\left|e^{\frac{y}{n}}-1\right|\arctan y}{y^2+1}\le$
$\displaystyle\le\frac{\pi}{4}\sup_{y\in[0,1]}\left(e^{\frac{y}{n}}-1\right)=\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\overset{n\to\infty}{\to}0$; dunque, possiamo scambiare limite e integrale ottenendo $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{ne^x\arctan(nx)}{n^2x^2+1}dx=$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan y}{y^2+1} dy = \int_0^1 \frac{\arctan y}{y^2+1} = \left[\frac{\arctan^2 y}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge totalmente in $[\delta, +\infty)$ $\forall\delta > 0$, dunque essendo anche a termini positivi possiamo scambiare serie e integrali e quindi
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-e^{-nx}}{n^2+n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

7. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: la convergenza è uniforme perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right| \overset{N\to\infty}{\to} 0$ in quanto è il resto di una serie convegente, ma non c'è convergenza assoluta (e quindi neanche totale) perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(b) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella assoluta.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$. (Vedere esercizio 5 punto b).

(d) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella uniforme.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$: fissato x, la serie converge puntualmente ma non assolutamente; inoltre, la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{(-1)^n x}{n}\right| \geq \left|\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{(-1)^n N}{n}\right| = N \left|\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n}\right| =$
$$= N\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{2N-2} - \frac{1}{2N-1}\right) = N\left(\frac{1}{N(N+1)} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2N-2)(2N-1)}\right) \geq N\left(\frac{1}{4N^2} + \ldots + \frac{1}{4N^2}\right) = N\frac{N}{2}\frac{1}{4N^2} = \frac{1}{8} \overset{N\to\infty}{\not\to} 0.$$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}$: fissato x, la serie è costituita da un unico termine e quindi la convergenza è puntuale e assoluta; inoltre, è uniforme, perché $\displaystyle\left|\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}\right| = \frac{1}{N} \overset{N\to\infty}{\to} 0$; tuttavia, non c'è convergenza totale in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 9 (27 Novembre 2009)
Numeri complessi, spazi metrici, contrazioni

1. (a) $\log(2i-2) = \log|2i-2| + i\arg(2i-2) + 2k\pi i = \log\left(2\sqrt{2}\right) + \frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i$

   (b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = \exp\left(\frac{1}{4}\log\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right) = \exp\left(\frac{\log\left|-1-\sqrt{3}i\right| + i\arg\left(-1-\sqrt{3}i\right) + 2k\pi i}{4}\right) =$
   $\exp\left(\frac{\log 2}{4} + \frac{\pi i}{3} + \frac{k\pi i}{2}\right) = \exp\left(\log\left(\sqrt[4]{2}\right)\right)\exp\left(\frac{\pi i}{3} + \frac{k\pi i}{2}\right) =$
   $= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right).$

   (c) $i^{\frac{2}{\pi}} = \exp\left(\frac{2}{\pi}\log i\right) = \exp\left(\frac{2}{\pi}(\log|i| + i\arg i + 2k\pi i)\right) = \exp\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{i\pi}{2} + 2k\pi i\right)\right) =$
   $= \exp(i+4k) = \cos(1+4k) + i\sin(1+4k).$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$: il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}} =$
   $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n} = 0$, dunque la serie converge solo in $z=0$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+\exp(in)}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2+\exp(in)}\right|}} = 1,$
   perché $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\exp(in)} \leq 1$; sul bordo del disco di convergenza la serie diverge perché $|z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{2+\exp(in)}\right| \geq \frac{1}{3}$ e quindi il termine n-esimo non tende a 0.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(3+i^n)^n|}} =$
   $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|3+i^n|} = \frac{1}{4}$; sul bordo del disco non c'è convergenza perché $|z| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\left(3+i^{4n}\right)^{4n} z^{4n}\right| = 1$ e dunque il termine n-esimo non tende a 0.

3. (a) $\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre c'è equidominatezza perché $\left|\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right| \leq xe^{-nx^2} \leq xe^{-x^2}$ che è integrabile in $[0,+\infty)$, e la convergenza è uniforme perché $\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right| \leq$

$\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} xe^{-nx^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in quanto $\frac{d}{dx}xe^{-nx^2} = \left(1-2nx^2\right)e^{-nx^2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$ e in questi punti la funzione vale $\frac{1}{\sqrt{2en}}$; dunque è lecito passare al limite sotto integrale, e dunque
$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_0^{+\infty}0dx = 0.$

(b) $\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{e^x}{e^{2x}+1}$, e la convergenza è uniforme in quanto
$\sup_{x\in\left[0,\frac{\log 3}{2}\right]}\left|\frac{e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}\right| \leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\log 3}{2}\right]}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = e^{\frac{\log 3}{2}} -$
$-\left(1+\frac{\log 3}{2n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ perché $e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è monotona crescente
$\forall n\in\mathbb{N}$; infatti, $\frac{d}{dx}e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \frac{e^x}{1+\frac{x}{n}} =$
$e^x\left(\frac{x}{n+x}\right) \geq 0$. Dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, si possono scambiare limite e integrale ottenendo così
$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx = \int_0^{\frac{\log 3}{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx = \int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{e^x}{e^{2x}+1}\overset{(y=e^x)}{=}$
$\overset{(y=e^x)}{=}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2} = [\arctan y]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

4. (a) Verifichiamo le tre proprietà: chiaramente $\|f\| := \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| \geq 0$, perché $|f(x)|\geq 0\ \forall x\in[-1,1]$, e inoltre $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f|\equiv 0 \Leftrightarrow f\equiv 0$; poi, $\|\lambda f\| = \sup_{x\in[-1,1]}|\lambda f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]}|\lambda||f(x)| =$
$= |\lambda|\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|$, e infine $\|f+g\| = \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)+g(x)| \leq$
$\leq \sup_{x\in[-1,1]}(|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]}|g(x)| = \|f\|+\|g\|.$

(b) $T(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)'(0) = (\alpha f'+\beta g')(0) = \alpha f'(0)+\beta g'(0) =$
$= \alpha T(f)+\beta T(g)$, dunque T è lineare.

(c) $\|f_n\| = \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{\arctan(nx)}{n}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, mentre $T(f_n) = \left(\frac{\arctan(nx)}{n}\right)'_{x=0} =$
$= \frac{1}{1+n^2x^2}_{x=0} = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Ciò implica che questa applicazione non è continua in 0: infatti, se lo fosse avremmo che $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 : \|f\|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |T(f)|<\epsilon$, ma questo è falso perché per $\epsilon = 1$ non esiste alcun δ con verifica quella condizione per tutte le f, perché non è mai verificata per le f_n.

5. (a) Se $x\notin\ell^p$, allora chiaramente si ha $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p = +\infty$; se invece $x\in\ell^p$, allora $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty$, dunque in particolare $|x_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, per-

tanto $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1}|x(n)| = |x(\bar{n})| = (|x(\bar{n})|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$.
Di conseguenza, se $\|x\|_p < +\infty$, allora $\|x\|_\infty < +\infty\ \forall p \geq 1$, dunque $x \in \ell^p \Rightarrow x \in \ell^\infty$.

(b) La successione costante $x_n = 1\ \forall n \geq 1$ appartiene a ℓ^∞ perché $\|x\|_\infty = 1$ ma ovviamente $x \notin \ell^p\ \forall p \geq 1$ perché $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

(c) $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p-q}|x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|_\infty^{p-q}|x_n|^q = \|x\|_\infty^{p-q}\|x\|_q^q \leq \|x\|_q^{p-q}\|x\|_q^q = \|x\|_q^p$, dunque $\|x\|_p \leq \|x\|_q$, dunque se $\|x\|_q < +\infty$, allora $\|x\|_p < +\infty\ \forall p \geq q \geq 1$, dunque $x \in \ell^q \Rightarrow x \in \ell^p$.

(d) Fissato $q \geq 1$, la successione $x_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$ non appartiene a ℓ^q ma appartiene a ogni $\ell^p\ \forall p > q$, perché $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ ma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} < \infty\ \forall \alpha > 1$.

(e) Come già visto in precedenza, $x \in \ell^p \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$, ma se ciò è vero allora $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, e dunque $x \in \ell^p \Rightarrow x \in c_0$; tuttavia, la successione $x_n = \frac{1}{\log n}$ appartiene a c_0 ma a nessun ℓ^p, perché per il criterio di condensazione di Cauchy la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n^p(\log 2)^p}$ e dunque diverge.

6. $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\int_0^1 ye^{-xy}(f(y) - g(y))dy\right| \leq \int_0^1 ye^{-xy}|f(y) - g(y)|dy \leq$
$= \|f - g\|_\infty \int_0^1 ye^{-xy}dy \leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 ydy = \|f - g\|_\infty \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\|f - g\|_\infty}{2}$,
dunque passando al $\sup_{x\in[0,1]}$ ottengo che $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{\|f - g\|_\infty}{2}$ e dunque Φ è una contrazione.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 10 (4 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali, contrazioni

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = \pi x \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = \pi x(t) \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{\pi x(t)} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\pi x(s)} \overset{(x(s)=x)}{=}$
$= \displaystyle\int_2^{x(t)} \frac{dx}{\pi x} = \frac{\log|x(t)| - \log 2}{\pi} \Rightarrow \log|x(t)| = \log 2\pi x \Rightarrow |x(t)| = 2e^{\pi}x \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = 2e^{\pi x}$, ove è stato scelto il segno positivo per rispettare le condizioni iniziali.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = x^2(t) + 4 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)+4} ds =$
$\displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^{x(t)} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{\arctan\left(\frac{x(t)}{2}\right)}{2} \Rightarrow x(t) = 2\tan(2t).$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$: quest'equazione è del tipo $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$, ove
$a(t) = 1$ e $b(t) = t$, dunque la soluzione sarà $x(t) = e^{\int_0^t ds}\left(x(0) + \displaystyle\int_0^t s e^{-\int_0^u du}\right) =$
$= e^t\left(1 + \displaystyle\int_0^t s e^{-s} ds\right) = e^t\left(1 + \left[-se^{-s}\right]_0^t + \int_0^t e^{-s} ds\right) = e^t(1 - te^{-t} -$
$-e^{-t} + 1) = 2e^t - t - 1.$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = t^2x^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = x^2(t)t^2 \Rightarrow \dfrac{t^3}{3} = \displaystyle\int_0^t s^2 ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds = \int_3^{x(t)} \frac{dx}{x^2} =$
$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{x(t)} \Rightarrow \dfrac{1}{x(t)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{t^3}{3} \Rightarrow x(t) = \dfrac{3}{1-t^3}.$

(e) $\begin{cases} \dot{x} = x\sin t + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$: analogamente al punto c, la soluzione è $x(t) =$
$= e^{\int_0^t \sin s ds}\left(\displaystyle\int_0^t e^{-\int_0^s \sin u du} \sin s ds\right) = e^{1-\cos t}\left(\int_0^t e^{\cos s - 1}\sin s ds\right) \overset{(y=\cos s - 1)}{=}$
$= e^{1-\cos t}\left(\displaystyle\int_0^{\cos t - 1} -e^y dy\right) = e^{1-\cos t}\left(\left[-e^y\right]_0^{\cos t - 1}\right) = e^{1-\cos t}\left(1 - e^{\cos t - 1}\right) =$
$= e^{1-\cos t} - 1.$

(f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos x \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{x(t)} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx =$
$= \displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \overset{(y=\sin x)}{=} \int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1+y} +$
$+ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\log|1+\sin(x(t))| - \frac{1}{2}\log|1-\sin(x(t))| =$
$= \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+\sin(x(t))}{1-\sin(x(t))}\right| \Rightarrow e^{2t} = \left|\dfrac{1+\sin(x(t))}{1-\sin(x(t))}\right| = \left|\dfrac{2}{1-\sin(x(t))} - 1\right| \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{2}{1-\sin(x(t))} = e^{2t} + 1 \Rightarrow 1 - \sin(x(t)) = \dfrac{2}{e^{2t}+1} \Rightarrow \sin x(t) = 1-$

$-\dfrac{2}{e^{2t}+1} = \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \Rightarrow x(t) = \arcsin\left(\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)$, ove è stato scelto il segno positivo per via della condizione iniziale.

(g) $\begin{cases} \dot{x} = x - \arctan t + \frac{1}{t^2+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$: ponendo $y(t) = x(t) - \arctan t$ ho che $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dfrac{1}{t^2+1}$ e dunque, essendo $\arctan 0 = 0$, $\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$: $t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = \log|y(t)| \Rightarrow |y(t)| = e^t \Rightarrow y(t) = e^t$, ove è stato scelto il segno positivo per rispettare la condizione iniziale; dunque, $x(t) = y(t) + \arctan t = e^t + \arctan(t)$.

(h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2 x \\ x(1) = 1 \end{cases}$; ponendo $y(t) = tx(t)$ ho che $\dot{y}(t) = t\dot{x}(t) + x(t)$ e dunque $\begin{cases} \dot{y} = ty \\ y(1) = 1 \end{cases}$: $\dfrac{t^2}{2} - 1 = \displaystyle\int_0^t s ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = \log|y(t)| \Rightarrow y(t) =$ $= e^{\frac{t^2}{2}-1} \Rightarrow x(t) = \dfrac{y(t)}{t} = \dfrac{e^{\frac{t^2}{2}-1}}{t}$, ove il segno è stato preso positivo per via dei dati iniziali.

(i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}^2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$; ponendo $y(t) = \dot{x}(t)$ otteniamo $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1 \\ x(t) = \int_0^t y(s) ds \end{cases}$: $t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = 1 - \frac{1}{y(t)} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow$ $\Rightarrow x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{1-s} = -\log|1-t|$.

2. (a) $\ddot{\ddot{x}} - x = 0$: il polinomio caratteristico associato all'equazione è $P(\lambda) =$ $= \lambda^4 - 1$, che ha per radici ± 1 e $\pm i$, quindi l'integrale generale dell'equazione è $c_1 e^t + c_2 e^t + c_3 \cos t + c_4 \sin t$.

(b) $\ddot{\ddot{x}} + 6\ddot{x} + 9x = 0$: il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(\lambda) =$ $= \lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = \left(\lambda^2 + 3\right)^2$, che ha per radici $\pm\sqrt{3}i$ con molteplicità doppia, dunque l'integrale generale è $c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$.

(c) $\dddot{x} - \ddot{x} - \alpha\dot{x} + \alpha x = 0$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 -$ $-\alpha\lambda + \alpha\lambda = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \alpha\right)$: se $\alpha < 0$ ho una radice reale e due complesse coniugate, dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 \cos\left(\sqrt{-\alpha}t\right) +$ $+ \sin\left(\sqrt{-\alpha}t\right)$, se $\alpha = 0$ ho 1 come radice singola e 0 come radice doppia, quindi l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 t + c_3$; se invece $\alpha = 1$, 1 è radice doppia e -1 è radice singola e dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$; infine, se $1 \neq \alpha > 0$, abbiamo tre radici reali distinte e dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 e^{\sqrt{\alpha}t} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}t}$.

3. (a) $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \\ \dot{x}(0) = 5 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ ha per radici $1 \pm 2i$, dunque le soluzioni dell'equazione saranno del tipo $x(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$; imponendo le condizioni iniziali otteniamo che

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = c_1 e^0 \cos(2\cdot 0) - 2c_1 e^0 \sin(2\cdot 0) + c_2 e^0 \sin(2\cdot 0) + 2c_2 e^t \cos(2\cdot 0) = c_1 + 2c_2 = 5 \\ x(0) = c_1 = 1 \end{cases},$$

dunque $(c_1, c_2) = (1, 2)$, cioè la soluzione è $e^t \cos(2t) + 2e^t \sin(2t)$.

(b) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $P_\lambda = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda - i)(\lambda + i)$, dunque la soluzione sarà del tipo $c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$; imponendo le condizioni iniziali ho che $\begin{cases} \ddot{x}(0) = -c_2 \cos 0 - c_3 \sin 0 = -c_2 = 2 \\ \dot{x}(0) = -c_2 \sin 0 + c_3 \cos 0 = c_3 = 2 \\ x(0) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$, dunque $(c_1, c_2, c_3) = (2, -2, 2)$ e dunque la soluzione è $x(t) = 2 - 2\cos t + 2\sin t$.

(c) $\begin{cases} \ddddot{x} - 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 4 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2$,

dunque $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^2 + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$; con le condizioni iniziali troviamo che $\begin{cases} \dddot{x}(0) = (c_1 + 3c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (3c_4 - c_3)e^{-0} - c_4 0 e^{-0} = c_1 + 3c_2 - c_3 + 3c_4 = 4 \\ \ddot{x}(0) = (c_1 + 2c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (c_3 - 2c_4)e^{-0} + c_4 0 e^{-0} = c_1 + 2c_2 + c_3 - 2c_4 = 0 \\ \dot{x}(0) = (c_1 + c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (c_4 - c_3)e^{-0} - c_4 0 e^{-0} = c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0 \\ x(0) = c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$

pertanto $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-1, 1, 1, 1)$ e cioè $x(t) = -e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$: se $\alpha \geq 1$, la funzione $|x|^\alpha$ è localmente Lipschitziana in quanto $||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq \sup_{z\in[-M,M]} \left|\frac{d}{dz}|z|^\alpha\right| |x - y| = \alpha M^{\alpha-1}|x - y|$, e dunque per il teorema di Picard la soluzione del problema di Cauchy è unica; questa soluzione è la soluzione banale $x(t) \equiv 0$, perché la condizione iniziale è un punto di equilibrio del sistema. Se invece $\alpha \in (0, 1)$, è possibile trovare altre soluzioni con il metodo di separazione delle variabili: $t = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{x(t)|x(t)|^{-\alpha}}{1-\alpha} \Rightarrow |x(t)|^{1-\alpha} = |t|(1-\alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = \pm((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ sono altre due soluzioni del problema.

5. $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\int_0^1 (xy)^\alpha (f(y) - g(y))\right| \leq \int_0^1 |x|^\alpha |y|^\alpha |f(y) - g(y)| dy \leq$
$\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 |y|^\alpha dy = \|f - g\|_\infty \left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{\|f - g\|_\infty}{\alpha + 1}$, dunque Φ è una contrazione, perché $\frac{1}{\alpha + 1} < 1$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 11 (11 Dicembre 2009)

Equazioni differenziali, ripasso

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $\dot{x(t)} = e^{x(t)}e^t \Rightarrow e^t - 1 = \int_0^t e^s ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{e^{x(s)}} ds \overset{(x=x(t))}{=} \int_0^{x(t)} e^{-x} dx = 1 - e^{-x(t)} \Rightarrow$
$= 2 - e^{-t} \Rightarrow x(t) = -\log\left(2 - e^t\right)$.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^3+t^2} \arctan x \\ x(0) = 0 \end{cases}$: la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema, dunque la soluzione è $x(t) \equiv 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

   (c) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + t\log t \\ x(1) = -1 \end{cases}$: $x(t) = e^{\int_1^t \frac{ds}{s}} \left(-1 + \int_1^t e^{-\int_1^s \frac{du}{u}} s \log s ds\right) = e^{\log t}\left(-1 + \int_0^t e^{-\log s} s \log s ds\right)$
$+ \int_0^t \frac{s \log s}{s} ds\bigg) = -t + t\int_1^t \log s ds = -t + t\left([s \log s]_1^t - \int_1^t \frac{s}{s} ds\right) = -t + t(t\log t + 1 - t) = t^2 \mathrm{l}$

   (d) $\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos x \sin^2 t \cos t \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$: $\frac{\dot{x}(t)}{\sin x \cos x} = \sin^2 t \cos t \Rightarrow \frac{\sin^3 t}{3} = \int_0^t \sin^2 s \cos s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{dx}{\sin x \cos}$
$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = [\log(\sin x) - \log(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} = \log(\tan(x(t)))$
$= \arctan\left(e^{\frac{\sin^3 t}{3}}\right)$.

2. (a) $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) \Rightarrow x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$;
determiniamo c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali: $\begin{cases} \dot{x}(0) = 3c_1 e^{3\cdot 0} - 2c_2 e^{-2\cdot 0} = 3c_1 - 2c_2 = 1 \\ x(0) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$
dunque $c_1 = 1 = c_2 \Rightarrow x(t) =$
$= e^{3t} + e^{-2t}$.

   (b) $\begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = 0 \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = (\lambda - 3 - i)(\lambda - 3 + i) \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t} \cos t + c_2 e^{-}$
imponendo le condizioni iniziali trovo che
$\begin{cases} \dot{x}(0) = 3c_1 e^{3\cdot 0} \cos 0 - c_1 e^{3\cdot 0} \sin 0 + 3c_2 e^{3\cdot 0} \sin 0 + c_2 e^{-3\cdot 0} \cos 0 = 3c_1 + c_2 = -1 \\ x(0) = c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (c_1, c_2) = ($
$\Rightarrow x(t) = e^{-3t} \cos t - 4e^{-3t} \sin t$.

   (c) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(0) = (c_1 + 2c_2 + 2c_3)e^0 + (c_2 + 4c_3)0e^0 + c_3 0^2 e^0 = c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 2 \\ \dot{x}(0) = (c_1 + c_2)e^0 + (c_2 + 2c_3)0e^0 + c_3 0^2 e^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ x(0) = c_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (2$
$\Rightarrow x(t) = 2e^t + te^t - t^2 e^t$.

(d) $\begin{cases} \dddot{x} + 8x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2\sqrt{3} \\ \dot{x}(0) = \sqrt{3} \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 + 8 = (\lambda + 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 4\right) = (\lambda + 2)\left(\lambda + 1 - \sqrt{3}i\right)\left(\lambda - 1 + \sqrt{3}i\right) =$

$= c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_3 e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(0) = 4c_1 e^{2\cdot 0} + \left(2\sqrt{3}c_3 - 2c_2\right) e^0 \cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \left(-2\sqrt{3}c_2 - 2c_3\right) e^0 \sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) = 4c_1 - 2c_2 \\ \dot{x}(0) = -2c_1 e^{2\cdot 0} + \left(c_2 + \sqrt{3}c_3\right) e^0 \cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \left(c_3 - \sqrt{3}c_2\right) e^0 \sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) = -2c_1 + c_2 + \sqrt{} \\ x(0) = c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 1) \Rightarrow x(t) = e^{-2t} + 2e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right)$.

3. $\dddot{x} - x = 0$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) \Rightarrow x(t) =$

$+c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ sono tutte le soluzioni dell'equazione; imponiamo ora le due condizioni: essendo $x(0) = c_1 + c_2$, la prima condizione equivale a dire $c_1 = -c_2$; inoltre, affinché $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, dovrà essere anche $c_1 = 0$; riassumendo, le soluzioni che rispettano entrambe le condizioni sono tutte e sole quelle in cui $c_1 = 0 = c_2$, cioè quelle del tipo $x(t) = c_3 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, al variare del parametro reale c_3.

4. $\begin{cases} \ddot{x} + \alpha x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$: se $\alpha = 0$, le soluzioni dell'equazione sono $x(t) = c_1 + c_2 t$, e imponendo le condizioni otteniamo $\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$, cioè $c_1 = 0 = c_2$, e quindi c'è solo la soluzione banale; se invece $\alpha < 0$, le soluzioni sono del tipo $x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}t}$, dunque con le condizioni iniziali abbiamo $\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x(1) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}} = 0 \end{cases}$, e anche questo sistema ci dà solo la soluzione banale; infine, se $\alpha > 0$, le soluzioni sono $c_1 \cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\alpha}t\right)$, e imponendo le condizioni otteniamo $\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(1) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \end{cases}$: la prima equazione ci dice che $c_1 = 0$, la seconda che $c_2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0$: se $\sqrt{\alpha} \notin \pi\mathbb{Z}$ allora $\sin(\sqrt{\alpha}) \neq 0$ e dunque anche in questo caso c'è solo la soluzione banale, mentre se $\sqrt{\alpha} \in \pi\mathbb{Z}$ la seconda condizione è verificata per ogni $c_2 \in \mathbb{R}$; dunque, $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo che per $\alpha = n^2\pi^2$ ci sono come soluzioni non banali $x(t) = c_2 \sin(n\pi t)$ al variare del parametro reale c_2.

5. $\begin{cases} \dot{x} = y(x + y)^n \\ \dot{y} = x(x + y)^n \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$: con il cambio di variabile $\begin{cases} w = x + y \\ z = x - y \end{cases}$ otteniamo che $\begin{cases} \dot{w} = \dot{x} + \dot{y} = (x + y)^{n+1} = w^{n+1} \\ \dot{z} = \dot{x} - \dot{y} = (y - x)(x + y)^n = -zw^n \\ w(0) = x(0) + y(0) = 1 \\ z(0) = x(0) - y(0) = 1 \end{cases}$: la variabile $w(t)$ può essere

trovata esplicitamente per separazione di variabili: $t = \int_0^t ds = \int_1^{w(t)} \frac{dw}{w^{n+1}} = \left[-\frac{1}{nw^n}\right]_1^{w(t)} =$
$= \frac{1}{n} - \frac{1}{nw^n(t)} \Rightarrow \frac{1}{w^n(t)} = 1 - nt \Rightarrow w(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nt}}$; a questo punto può essere trovata anche la variabile $z(t)$: $\begin{cases} \dot{z} = -\frac{z}{1-nt} \\ z(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\log(1-nt)}{n} = \left[\frac{\log(1-ns)}{n}\right]_0^t = -\int_0^t \frac{ds}{1-ns} =$
$= \sqrt[n]{1-nt}$; dunque, tornando alle variabili di partenza, otteniamo che $\begin{cases} x(t) = \frac{w(t)+z(t)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nt}} + \frac{\sqrt[n]{1-nt}}{2} \\ y(t) = \frac{w(t)-z(t)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nt}} - \frac{\sqrt[n]{1-nt}}{2} \end{cases}$.

6. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$ è una serie a termini positivi che converge totalmente in ogni insieme del tipo $[\delta, +\infty)$, perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{e^{-nx}}{n+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$; dunque, è lecito scambiare serie e integrale ottenendo così
$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}$ converge totalmente in $[\delta, +\infty)$, perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)}$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$, e inoltre $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{-nx}\sin(nx)|}{n+1} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$, che è integrabile per quanto visto in precedenza, dunque c'è equidominatezza e quindi è possibile scambiare serie e integrale:
$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx \overset{(y=nx)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = \int_0^{+}$
$[-e^{-y}\sin y]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos y dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos y dy = [-e^{-y}\cos y]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = 1-$
$- \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = 1 - \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx \Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = \frac{1}{2}.$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 12 (18 DICEMBRE 2009)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. (a) $\ddot{x} + x = e^t$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha per radici $\pm i$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 \cos t + c_2 \sin t$: troviamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = ae^t \Rightarrow \ddot{\bar{x}}(t) + x(t) = 2ae^t$, dunque ho una soluzione particolare per $a = \dfrac{1}{2}$ e quindi l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \dfrac{e^t}{2}$

   (b) $\dddot{x} - 2\dot{x} - 4x = 1$: il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 4$ ha per radici 2 e $1 \pm i$, quindi l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x} = a \Rightarrow \dddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{x}} - 4\bar{x} = -\dfrac{a}{4} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$, quindi l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t - \dfrac{1}{4}$.

   (c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = e^t$: $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$, dunque l'omogenea associata ha per soluzione $c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t}$: cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x(t) = ate^t$: $\dddot{\bar{x}} + \ddot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}} - \bar{x} =$ $= a(t + 3)e^t + a(t + 2)e^t - a(t + 1)e^t - ate^t = 4ae^t \Rightarrow a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x(t) =$ $= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t} + \dfrac{te^t}{4}$ è l'integrale generale.

   (d) $\ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = t \sin t$: $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda + 1)^2$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $x(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_3 t \sin t$; cerchiamo ora una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = at^3 \cos t + bt^2 \cos t +$ $+ ct^3 \sin t + dt^2 \sin t \Rightarrow \ddddot{\bar{x}} - 2\ddot{\bar{x}} + \bar{x} = at^3 \cos t + (b - 12c)t^2 \cos t - (8d+$ $+36a)t \cos t + (24c - 12b) \cos t + ct^3 \sin t + (12a + d)t^2 \sin t + (8b-$ $-36c)t \sin t + (24a - 12d) \sin t - 2at^3 \cos t + (12c - 2b)t^2 \cos t + (12a+$ $+8d)t \cos t + 4b \cos t - 2ct^3 \sin t - (12a + 2d)t^2 \sin t + (12c - 8b)t \sin t+$ $+4d \sin t + at^3 \cos t + bt^2 \cos t + ct^3 \sin t + dt^2 \sin t = -24at \cos t + (24c-$ $-8b) \cos t - 24ct \sin t(24a - 8d) \sin t \Rightarrow (a, b, c, d) = \left(0, -\dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{24}, 0\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{x}(t) = -\dfrac{t^3 \sin t}{24} - \dfrac{t^2 \cos t}{8} \Rightarrow x(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_3 t \sin t-$ $-\dfrac{t^3 \sin t}{24} - \dfrac{t^2 \cos t}{8}$ è l'integrale generale.

2. (a) $\begin{cases} \ddot{x} + 3x = \cos(3t) \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 3$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 \cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3}t\right)$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$: $\ddot{\bar{x}} + 3\bar{x} = -9a\cos(3t)-$ $-9b\sin(3t) + a\cos(3t) + b\sin(3t) = -8a\cos(3t) - 8b\sin(3t) \Rightarrow \bar{x}(t) =$

$= -\dfrac{\cos(3t)}{8}$, dunque l'integrale generale è $c_1 \cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3}t\right) -$
$-\dfrac{\cos(3t)}{8}$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -\sqrt{3}c_1 \sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \sqrt{3}d_2 \cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \frac{3}{8}\sin(3\cdot 0) = \sqrt{3}c_2 = 0 \\ x(0) = c_1 - \frac{1}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_1, c_2) = \left(\dfrac{7}{8}, 0\right) \Rightarrow x(t) = \dfrac{7}{8}\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \dfrac{\cos(3t)}{8}$.

(b) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = e^{-3t} \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$; cerchiamo ora una soluzione del tipo $\bar{x}(t) = at^2 e^{-3t} \Rightarrow \ddot{\bar{x}} + 6\dot{\bar{x}} + 9\bar{x} = a\left(9t^2 - 12t + 2\right)e^{-3t} + 6a(2t-$
$-3t^2)\,e^{-3t} + 9at^2 e^{-3t} = 2ae^{-3t} \Rightarrow \bar{x}(t) = \dfrac{t^2 e^{-3t}}{2}$, quindi l'integrale generale è $c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \dfrac{t^2 e^{-3t}}{2}$; imponiamo ora i dati iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -3c_1 e^{-3\cdot 0} + c_2(1 - 3\cdot 0)e^{-3\cdot 0} + \left(0 - \frac{3}{2}0^2\right)e^{-3\cdot 0} = -2c_2 = -2 \\ x(0) = c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_1, c_2) = (0, -1) \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{-3t} - te^{-3t}$.

(c) $\begin{cases} \dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 6e^{4t} \\ \ddot{x}(0) = 30 \\ \dot{x}(0) = 10 \\ x(0) = 4 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono $c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = ae^{4t} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} - 6\ddot{\bar{x}} + 11\dot{\bar{x}} - 6\bar{x} =$
$= 64ae^{4t} - 96ae^{4t} + 44e^{4t} - 6e^{4t} = 6e^{4t} \Rightarrow \bar{x}(t) = e^{4t}$; imponiamo ora i dati iniziali: $\begin{cases} \ddot{x}(0) = c_1 e^0 + 4c_2 e^{2\cdot 0} + 9c_3 e^{3\cdot 0} + 16e^{4\cdot 0} = c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16 = 30 \\ \dot{x}(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^{2\cdot 0} + 3c_3 e^{3\cdot 0} + 4e^{4\cdot 0} = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4 = 10 \\ x(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow$
$(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow x(t) = e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t}$.

3. (a) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x\log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: innanzi tutto, se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = \pm 1$ la soluzione del problema è costante $x(t) \equiv x_0$, perché questi sono gli zeri della funzione $x\log|x|$; altrimenti determiniamo la soluzione per separazione di variabili: $t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x\log|x|} = \log|\log|x(t)|| -$
$-\log|\log|x_0|| \Rightarrow \log|\log|x(t)|| = t + \log|\log|x_0|| \Rightarrow |\log|x(t)|| =$
$= |\log|x_0||e^t \Rightarrow \log|x(t)| = \log|x_0|e^t \Rightarrow |x(t)| = |x_0|^{e^t} \Rightarrow x(t) = sign(x_0)|x_0|^{e^t}$, ove i moduli sono stati tolti tenendo conto del dato iniziale. Comunque prendo $x_0 \in \mathbb{R}$, soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$, dunque l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(-\infty, +\infty)$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: la soluzione è costante $x(t) \equiv x_0$ se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = \pm 1$, altrimenti la determiniamo per separazione di variabili:

$$t=\int_0^t ds=\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x^3-x}=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x-1}-\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{\log|x(t)-1|}{2}-\frac{\log|x_0-1|}{2}+\frac{\log|x(t)+1|}{2}-\frac{\log|x_0+1|}{2}-\log|x(t)|+$$
$$+\log|x_0|=\frac{\log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|}{2}-\frac{\log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|}{2}\Rightarrow\log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|=\log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|+$$
$$+2t\Rightarrow\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|=\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|e^{2t}\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2(t)}=\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}=\frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x^2(t)}=1-\frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t}=\frac{x_0^2-\left(x_0^2-1\right)e^{2t}}{x_0^2}\Rightarrow x(t)=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-\left(x_0^2-1\right)e^{2t}}}:$$
questa soluzione è definita fin tanto che l'argomento della radice è positivo, ovvero $x_0>\left(x_0^2-1\right)e^{2t}$: se $|x_0|\leq 1$ il termine a destra non è mai positivo e dunque la condizione è sempre verificata, cioè l'intevallo massimale di esistenza è $(-\infty,+\infty)$; altrimenti, la condizione è vera $\Leftrightarrow e^{2t}<\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}\Leftrightarrow t<\log\sqrt{\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}}$, e dunque l'intervallo massimale di esistenza è $\left(-\infty,\log\sqrt{\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}}\right)$

4. (a) $\begin{cases}\dot{x}=|x|\arctan\left(e^x\right)\\ x(0)=x_0\end{cases}$: l'unico punto di equilibrio del sistema è l'origine, perché la funzione $|x|\arctan(e^x)$ si annulla solo in $x=0$. Inoltre, $||x|\arctan(e^x)|\leq\dfrac{\pi}{2}|x|$, e dunque le soluzioni sono definite per tutti i tempi per qualsiasi scelta del dato iniziale.

   (b) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\\ x(0)=x_0\end{cases}$: i punti di equilibrio sono gli zeri della funzione $x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ovvero $x=0$ e $x=\dfrac{1}{k\pi}$ per $k\in\mathbb{Z}$. Se $|x_0|\leq\dfrac{1}{\pi}$, il dato iniziale si trova in mezzo a due punti di equilibrio e dunque la soluzione è definita per tutti i tempi; se invece $x_0>\dfrac{1}{\pi}$, l'intervallo massimale è $\left(\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_0}\frac{dx}{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)},\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$, che è illimitato a sinistra ma non a destra in quanto $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\approx\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}<+\infty$; analogamente, se $x_0<-\dfrac{1}{\pi}$ l'intervallo massimale $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0}\frac{dx}{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)},\int_{x_0}^{\frac{1}{\pi}}\frac{dx}{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ è illimitato a destra e limitato a sinistra.

5. $(\dot{x},\dot{y})=-\nabla F(x,y)$

   (a) Se $\nabla F(x_0,y_0)=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di equilibrio e quindi $\nabla F(x(t),y(t))=\nabla F(x_0,y_0)=0$, in particolare è vero passando al $t\to+\infty$; viceversa, $\dfrac{d}{dt}F(x(t),y(t))=\langle\nabla F(x(t),y(t)),(\dot{x}(t),\dot{y}(t))\rangle=$

$= \langle \nabla F(x(t),y(t)), -\nabla F(x(t),y(t))\rangle = -\|\nabla F(x(t),y(t))\|^2 < 0$, dunque $t \to F(x(t),y(t))$ è una funzione decrescente e inferiormente limitata e pertanto avrà un asintoto orizzontale e quindi $-\|\nabla F(x(t),y(t))\|^2 =$ $= \frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, ovvero $\|\nabla F(x(t),y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -2x-2y \\ \dot{y} = -2x-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x+2y \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^2+2xy+g_1(y) \\ F(x,y) = 2xy+2y^2+g_1(x) \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x,y) = x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2 \geq 0$ e quindi in particolare F è limitata dal basso.

(c) Per quanto visto in precedenza, $\|\nabla F(x(t),y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, ma $\nabla F(x,y) =$ $= (2x+2y, 2x+4y)$ si annulla solo in $(0,0)$ e $\|\nabla F(x,y)\|^2 = (2x+2y)^2+$ $+(2x+4y)^2 \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} \infty$; di conseguenza, essendo $\nabla F(x,y)$ continua, ho che $\|\nabla F(x(t),y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0 = \|\nabla F(0,0)\| \Leftrightarrow (x(t),y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} (0,0)$, e dunque deve essere $(x(t),y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} (0,0)$ per qualunque scelta del dato iniziale.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2+y^2-2\right) \\ \dot{y} = -4x\left(x^2+y^2-2\right) \end{cases}$: i punti di equilibrio sono tutti quelli in cui $x^2+y^2-2=0$, cioè quelli appartenenti alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$, e quelli in cui $(4y,-4x) = (0,0)$, cioè l'origine; cerchiamo ora una funzione Hamiltoniana $H \in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ tale che $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$: se esiste H siffatta, sarà anche una costante del moto;

$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 4y\left(x^2+y^2-2\right) = 4x^2y+4y^3-8y \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -4x\left(x^2+y^2-2\right) = -4x^3-4xy^2+8x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} H(x,y) = 2x^2y^2+y^4-4y^2+g_1(x) \\ -H(x,y) = -x^4-2x^2y^2+4x^2+g_2(y) \end{cases} \Rightarrow H(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2-$ $-4x^2-4y^2+3 = \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-3\right)$. Essendo questa una costante del moto, le traiettorie saranno contenute nelle curve di livello di H, ovvero negli insiemi tali che $\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-3\right) = c$, dunque per poter disegnare le traiettorie è sufficiente sapere come sono fatte queste curve di livello: $\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-3\right) - c = \left(x^2+y^2\right)^2 - 4\left(x^2+y^2\right) + (3-c) =$ $= 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 2 \pm \sqrt{c+1}$: se $c < -1$ le curve di livello sono vuote, mentre la curva corrispondente $c = -1$ è la circonferenza $x^2+y^2 = 2$; se $-1 < c < 3$ le curve sono formate da due circonferenza centrate nell'origine aventi raggio $\sqrt{2+\sqrt{c+1}}$ e $\sqrt{2-\sqrt{c+1}}$, mentre per $c = -3$ ottengo la circonferenza di raggio 2 e quella di raggio 0, cioè l'origine, e infine quando $c > 3$ la curva di livello è formata da una sola circonferenza di raggio $\sqrt{2+\sqrt{c+1}}$; in particolare, tutte le traiettorie del sistema avvengono su circonferenze centrate nell'origine.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 1 (28 Settembre 2009)
Limiti e continuità in più variabili

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$, perché $|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)y}{x^2+y^2} \leq |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ non esiste perché lungo la traiettoria $(x,y)=(t,t)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\Big|_{(x,y)=(t,t)} = \lim_{t\to0}\frac{t^4}{2t^4} = 2$ mentre lungo la direzione $(x,y)=(t,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\Big|_{(x,y)=(t,0)} = \lim_{t\to0} 0 = 0.$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+y^2}$ non esiste perché lungo la direzione $(x,y)=(t,0)$, $\frac{x^4y}{x^8+y^2} = 0$ mentre lungo $(x,y) = \left(t,t^4\right)$ il limite diventa $\lim_{t\to0}\frac{t^8}{2t^8} = \frac{1}{2}$.

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2+2y^2}-1}{x^2+y^2} = 2$ perché passando in coordinate polari il limite diventa $\lim_{\rho\to0}\frac{e^{2\rho^2}-1}{\rho^2} = 2.$

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy^3|}}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, quindi studieremo la continuità di f nell'origine: la funzione non è continua anche in questo punto, perché lungo la traiettoria$(x,y)=(t,t)$ si ha che $f(x,x) = \frac{t^2}{t^4+t^2} = \frac{1}{t^2+1} \overset{t\to0}{\to} 1.$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^3y\right)}{\sqrt{x^8+y^4}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$ e lo è anche nell'origine. Infatti $\left|\frac{\arctan\left(x^3y\right)}{\sqrt{x^8+y^4}}\right| \leq \frac{|x^3y|}{\sqrt{x^8+y^4}} = \frac{\left(x^8\right)^{\frac{3}{8}}\left(y^4\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^8+y^4}} \leq$
   $\leq \left|\frac{(x^8+y^4)^{\frac{3}{8}}(x^8+y^4)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^8+y^4}}\right| \leq \left(x^8+y^4\right)^{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\right)} = \left(x^8+y^4\right)^{\frac{1}{8}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos\left(x^2y-y\right)}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,0) \end{cases}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ è ovviamente continua per $(x,y)\neq(1,0)$ e lo è anche in $(1,0)$, perché
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{1-\cos\left(x^2y-y\right)}{(x-1)^2+y^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{1-\cos\left(y\left(x^2-1\right)\right)}{y^2(x^2-1)^2}\right|\left|\frac{y^2\left(x^2-1\right)^2}{(x-1)^2+y^2}\right| =$$
   $$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2\left(x^2-1\right)^2}{2\left((x-1)^2+y^2\right)} \leq \frac{\left(y^2+(x-1)^2\right)\left(x^2-1\right)}{2\left((x-1)^2+y^2\right)} = \frac{x^2-1}{2} \overset{(x,y)\to(1,0)}{\to} 0.$$

(d) $\begin{cases} \log\left(\frac{(x+y^2)^2}{x^2+y^4}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ non è continua nell'origine perché lungo la traiettoria $(x,y)=\left(t,t^2\right)$ il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left(\frac{(x+y^2)^2}{x^2+y^4}\right)$ diventa $\lim_{t\to 0}\log\left(\frac{(2t^2)}{2t^4}\right) = \lim_{t\to 0}\log 2 \neq 0$.

3. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\langle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ perché per ipotesi $\langle x,y\rangle = 0$.

4. $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right\rangle = \frac{\langle x+y, x+y\rangle}{4} + \frac{\langle x-y, x-y\rangle}{4} =$ $= \frac{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle}{4} + \frac{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle}{4} = \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4} + \frac{\langle x,y\rangle}{2} + \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4} -$ $- \frac{\langle x,y\rangle}{2} = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$.

5. (a) Come da suggerimento, cerchiamo il massimo della funzione $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$: poiché $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $f'(x) = y - x^{p-1} = 0 \iff y = x^{p-1} \iff x = y^{\frac{1}{p-1}}$, allora $\max[0,+\infty) f = f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = y^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q}$, dunque $xy = \frac{x^p}{p} + f(x) \le \frac{x^p}{p} + \max_{[0,+\infty)} f = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

(b) Come da suggerimento, applicando la disuguaglianza di Young con $x = \frac{|a_n|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $y = \frac{|b_n|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ si ha che $\frac{|a_n||b_n|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le$ $\le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \frac{|a_n|^p}{p\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p} + \frac{|b_n|^p}{q\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q}$, dunque sommando per n che va da 0 a N si ha che $\frac{\sum_{n=0}^N |a_n||b_n}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\sum_{n=0}^N |a_n|^p}{p\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p} + \frac{\sum_{n=0}^N |b_n|^p}{q\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q}$, e passando al $\lim_{N\to\infty}$ si ottiene $\frac{\sum_{n=0}^\infty |a_n||b_n|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p}{p\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p} + \frac{\sum_{n=0}^\infty |b_n|^p}{q\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q} =$ $= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty |a_n||b_n| \le \left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

(c) Se $p = 1$ la disuguaglianza $\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n| \le \sum_{n=0}^\infty |a_n| + \sum_{n=0}^\infty |b_n|$ deriva dalla disuguaglianza triangolare $|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n|$, sommando poi per n che varia da 0 a N e passando al $\lim_{N\to\infty}$; se invece $p > 1$, allora $\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^p}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^{p-1}|a_n + b_n|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \le$ $\le \frac{\sum_{n=0}^\infty |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^\infty |b_n||a_n + b_n|^{p-1}}{\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \le$

$$\leq \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n+b_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n+b_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} =$$

$$= \frac{\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 2 (29 Settembre 2010)

Limiti e continuità in più variabili

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}$ non esiste perché $f(x,0)=0 \stackrel{x\to 0}{\to} 0$ ma $f(0,y)=\frac{y^4}{y^4}=1 \stackrel{y\to 0}{\to} 1 \neq 0$.

   (b) $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sin(y^3)}{x^4+y^2}=0$ perché $\left|\frac{\sin(y^3)}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{1}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{4}} \stackrel{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} 0$,

   perché $0 \leq \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 = x^4-x^2+\frac{1}{4} \Rightarrow x^4 \geq x^2-\frac{1}{4}$.

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^3)}{x^4+y^2}=0$ perché $\left|\frac{\sin(y^3)}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{|y^3|}{x^4+y^2} \leq \frac{|y|\left(x^4+y^2\right)}{x^4+y^2}=|y| \stackrel{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (d) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}=0$ non esiste perché $f(x,0,0)=0 \stackrel{x\to 0}{\to} 0$

   ma $f\left(x,x,x^2\right)=\frac{x^4}{3x^4}=\frac{1}{3} \stackrel{x\to 0}{\to} \frac{1}{3} \neq 0$

2. (a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in $\mathbb{R}^2$

   ma non è continua nell'origine perché $f\left(y^2,y\right)=\frac{e^{y^4}-1}{2y^4} \stackrel{y\to 0}{\to} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

   (b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4y^3}{x^8+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua nell'origine perché

   $$\left|\frac{x^4y^3}{x^8+y^4}\right| = \left|\frac{\left(x^8\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^8+y^4}\right| \leq \left|\frac{\left(x^8+y^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^8+y^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^8+y^4}\right| = \left(x^8+y^4\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-1} =$$
   $$= \left(x^8+y^4\right)^{\frac{1}{4}} \stackrel{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$$

   (c) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{\tan(xyz)}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è continua nell'origine

   perché $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\tan(xyz)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\tan(xyz)}{xyz}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} =$

   $$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \text{ e } \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} \leq$$
   $$\leq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0.$$

   (d) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} & \text{se } x\neq y \\ e^{-xy} & \text{se } x=y \end{cases}$ è ovviamente continua al difuori della bisettrice del primo e terzo quadrante, ed è continua anche lungo questa retta, perché, per il teorema della media integrale, si ha

$$\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} = e^{-z^2} \text{ per un opportuno } z \in [x,y], \text{ quindi } \left|\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} - e^{xy}\right| =$$
$$= \left|e^{z^2} - e^{-xy}\right| \overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to} \left|e^{-x_0^2} - e^{-x_0^2}\right| = 0.$$

3. Chiaramente la funzione è continua in ogni punto diverso da $(0,\dots,0)$. Nell'origine invece è continua $\Leftrightarrow \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 2\beta$: infatti, in questo caso abbiamo che $0 \le \frac{|x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta} = \frac{\left(x_1^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}}\dots\left(x_n^2\right)^{\frac{\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta} \le \frac{\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^\beta} =$ $= \left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{2}-\beta} \overset{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)}{\to} 0$; se invece $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \le 2\beta$, allora $f(x,\dots,x) = \frac{|x|^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{(nx^2)^\beta} = \frac{|x|^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-2\beta}}{n^\beta} \overset{x\to 0}{\not\to} 0.$

4. $\Rightarrow$ Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$; allora $\forall y \in A$ si ha che $B_\varepsilon(y) \subset A$, in particolare se $y = f(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$; inoltre, se f è continua, allora $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, cioè $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A$, ovvero $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$, dunque per l'arbitrarietà di x_0 ho che $f^{-1}(A)$ è aperto.

   $\Leftarrow$ Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$; allora $B_\varepsilon(f(x_0))$ è aperto in $\mathbb{R}^m$ e dunque $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è aperto, cioè ogni $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è interno e in particolare per $x = x_0$ si ha che $\exists\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, ma allora $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$, cioè f è continua in x_0, che però è un punto arbitrario e dunque f è continua.

5. $0 < f(x,y) = \frac{e^{\cos x}}{1+x^2+y^2+\sin^2(xy)} \le e = f(0,0) \Rightarrow \max_{\mathbb{R}^2} f = e$; inoltre, $|f(x,y)| \le \frac{e}{1+x^2+y^2} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} 0$ e dunque $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$, e non è un minimo perché $f(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 3 (12 Ottobre 2010)
Derivazione in più variabili

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è differenziabile al di fuori dell'origine, perché rapporto di funzioni differenziabili; nell'origine la funzione ammette derivate parziali, entrambe nulle, perché, essendo nulla lungo gli assi, si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$, inoltre esistono le derivate direzionali in quanto $\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2hk}{t\sqrt{t^2h^2+t^2k^2}}=$ $=\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$; tuttavia, la funzione non è differenziabile nell'origine perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$ $=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}\neq0$ perché per $h=k$ questa quantità vale costantemente $\frac{1}{2}$.

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, inoltre nell'origine ammette derivate parziali perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\sin\left(h^2\right)}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(h^2\right)-h^2}{h^3}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\left(\sin\left(h^2\right)-h^2\right)}{\frac{\partial}{\partial h}\left(h^3\right)}$ $=\lim_{h\to0}\frac{2h\cos\left(h^2\right)-2h}{3h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2}{3}h^3\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(h^2\right)-1}{h^4}=-\lim_{h\to0}\frac{h^3}{3}=0$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{\frac{\sin\left(k^2\right)}{k^2}-1}{k}=0$; la funzione è inoltre differenziabile (e dunque ha derivate direzionali) perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=$ $=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{\sin\left(h^2+k^2\right)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{\rho=\sqrt{h^2+k^2}}{=}\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{\sin\left(\rho^2\right)}{\rho^2}-1}{\rho}=0.$

(c) $f(x,y)=\sqrt[4]{x^8+y^2}$ nell'origine ammette solo la derivata parziale nella variabile x, perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[4]{h^8}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=0$ ma $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{\sqrt[4]{k^2}}{k}=$ $=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|k|}}{k}=\pm\infty$; dunque la funzione non può essere differenziabile, e ammette derivate direzionali solo in direzione dell'asse x perché $\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[4]{t^8h^8+t^2k^2}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[4]{t^6h^8+k^2}}{\sqrt{t}}=\begin{cases}+\infty & \text{se } k\neq0\\ 0 & \text{se } k=0\end{cases}.$

(d) $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ammette derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché è nulla lungo gli assi, inoltre è differenziabile (e dunque ha tutte le derivate direzionali) perché $\left|\dfrac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\dfrac{hk\sin\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \dfrac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \dfrac{|h|\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= |h| \overset{(h,k)\to(0,0)}{\rightarrow} 0.$

(e) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^6} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ ha derivate direzionali tutte nulle perché è nulla lungo gli assi, inoltre ha tutte le derivate direzionali in quanto $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(th,tk,tj)-f(0,0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t^3hk^2}{t^3h^2+t^3k^2+t^7j^6} =$
$= \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{hk^2}{h^2+k^2+t^4j^6} = \dfrac{hk^2}{h^2+k^2}$, ma non è differenziabile perché $\lim\limits_{(h,k,j)\to(0,0,0)}\dfrac{f(h,k,j)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(h,k,j)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\neq 0$ in quanto quest'ultima quantità per $h=k=j$ vale $\dfrac{h^3}{(2h^2+h^6)\sqrt{3h^2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}\,(2+h^4)} \overset{h\to0}{\rightarrow} \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

2. (a) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}$ è di classe C^1 su tutto il suo insieme di definizione, che è $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, dunque basta estendere la funzione nell'origine; poiché $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|\sqrt{x^4}\sqrt{y^4}}{x^4+y^4} \le \dfrac{|xy|\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4} = |xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0$, ponendo $f(0,0)=0$ la funzione può essere estesa con continuità; resta da vedere se sono continue anche le sue derivate parziali: essendo la funzione nulla lungo gli assi, le derivate parziali nell'origine sono entrambe nulle e quindi bisogna solo verificare se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\leftarrow} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, ma questa condizione è verificata perché $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\dfrac{3x^2y^3\left(x^4+y^4\right)-4x^6y^3}{\left(x^4+y^4\right)^2}\right| =$
$= \dfrac{x^2y^2\left|3y^5-x^4y\right|}{\left(x^4+y^4\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x^4}\sqrt{y^4}\left|3y^5-x^4y\right|}{\left(x^4+y^4\right)^2} \le \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}\left(\left|3y^5\right|+\left|x^4y\right|\right)}{\left(x^4+y^4\right)^2} =$
$= \dfrac{3|y|y^4+|y|x^4}{x^4+y^4} \le \dfrac{3|y|\left(x^4+y^4\right)}{x^4+y^4} = 3|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0$ e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le 0 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0$

(b) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^2}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e $|f(x,y)| = \left|\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^3\left(x^6+y^2\right)}{x^6+y^2}\right| =$
$= \left|x^3\right| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0$, dunque ponendo $f(0,0)=0$ posso estendere f ad una funzione continua su tutto il piano; tuttavia, questa funzione non è C^1 perché solo la derivata parziale in x è continua: infatti, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\dfrac{3x^2y^2\left(x^6+y^2\right)-6x^8y^2}{\left(x^6+y^2\right)^2}\right| = \dfrac{3x^2y^2\left|y^2-3x^6\right|}{\left(x^6+y^2\right)^2} \le \dfrac{3x^2\left(x^6+y^2\right)\left(y^2+3x^6\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2} =$
$= \dfrac{3x^2\left(3x^6+y^2\right)}{x^2+y^6} \le \dfrac{3x^2\left(3x^6+3y^2\right)}{x^6+y^2} = 9x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0$ ma $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^3y\left(x^6+y^2\right)-2x^3y^3}{\left(x^6+y^2\right)^2} =$

$= \dfrac{2x^9y}{\left(x^6+y^2\right)^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\not\to} (0,0)$ perché per $y=x^3$ questa quantità vale costantemente $\dfrac{1}{2}$.

3. Supponiamo $q=\infty$: se $x_n \notin \ell^p$ allora ovviamente $\|x\|_\infty \le \|x\|_p = +\infty$, se invece $x \in \ell^p$ allora $x(k) \overset{k\to\infty}{\to} 0$ e dunque $\|x\|_\infty := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \left|x\left(\bar{k}\right)\right|$ per $k \in \mathbb{N}$ opportuno e dunque $\|x\|_\infty = \left|x\left(\bar{k}\right)\right| = \left(\left|x\left(\bar{k}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)|\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$; se invece $q<+\infty$ allora $\|x\|_q = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x\|_\infty^{q-p}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_\infty^{\frac{q-p}{q}}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} =$
$= \|x\|_\infty^{\frac{q-p}{q}}\|x\|_p^{\frac{p}{q}} \le \|x\|_p^{\frac{q-p}{q}}\|x\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x\|_p$. Dunque, $\|x|_p < +\infty \Rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p < +\infty\ \forall 1 \le p \le q \le \infty$, cioè $x \in \ell^p \Rightarrow x \in \ell^q$.

4. $x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=k \\ 0 & \text{se } n \ne k \end{cases}$.

   (a) $x_n \in \ell^p\ \forall 1 \le p \le \infty$ perché $\|x_n\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|x_n(k)| = 1$ e $\|x_n\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_n(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1$.

   (b) x_n è una successione limitata in $\ell^p\ \forall 1 \le p \le \infty$ perché, per quanto visto al punto precedente, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|_p = 1 < +\infty\ \forall 1 \le p \le \infty$.

   (c) x_n non ha sottosuccessioni convergenti in ℓ^p per alcun $1 \le p \le \infty$ perché non ha sottosuccessioni di Cauchy, in quanto $n \ne m \Rightarrow (x_n - x_m)(k) =$
   $= \begin{cases} 1 & \text{se } k=n \\ -1 & \text{se } k=m \\ 0 & \text{se } n \ne k \ne m \end{cases}$ e dunque $\|x_n - x_m\|_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p}} & \text{se } p<\infty \\ 1 & \text{se } p=\infty \end{cases}$,
   quindi $\|x_n - x_m\|_p \overset{m,n\to\infty}{\not\to} 0$.

5. Se $f \equiv 0$, allora ovviamente $\min\limits_{\mathbb{R}^n} f = \max\limits_{\mathbb{R}^n} f = 0$; altrimenti $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \ne 0$; supponendo $f(x_0) > 0$, per definizione di estremo superiore trovo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_n) \to_{\mathbb{R}^n} f$; inoltre, essendo $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} f \ge f(x_0) > 0 = \lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)$, x_n è una successione limitata, perché se per assurdo x_n avesse una sottosuccessione x_{n_k} tale che $\|x_{n_k}\| \overset{k\to\infty}{\to} \infty$ allora si avrebbe $f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} 0 \ne \sup\limits_{\mathbb{R}^n} f$, che è assurdo; dunque, x_n ha un'estratta x_{n_j} convergente a $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e perciò $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} f = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) \overset{j\to\infty}{=} f(\bar{x})$ e quindi f ammette massimo in $\bar{x}$; se invece $f(x_0) < 0$, si può applicare questo ragionamento alla funzione $-f$, dunque $-f$ ha un massimo e quindi f ha un minimo.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 4 (19 Ottobre 2010)

Derivazione in più variabili

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile su $\mathbb{R}^2$, inoltre nell'origine ha le derivate parziali entrambe nulle perché è nulla lungo gli assi, inoltre è differenziabile (e dunque continua dotata di derivate direzionali) perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=$ $=\lim_{(h.k)\to(0,0)}\frac{\log\left(1+h^2k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\log\left(1+h^2k^2\right)}{h^2k^2}\frac{h^2k^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ e $\left|\frac{h^2k^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|\leq\frac{\left(h^2+k^2\right)\left(h^2+k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\overset{(h,k)\to(0,0)}{\to}0.$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ha derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché è nulla lungo gli assi, inoltre ha tutte le derivate direzionali perché $\lim_{t\to0}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^5h^2k^3}{t^5h^4+t^7k^6}=\lim_{t\to0}\frac{h^2k^3}{h^4+t^2k^6}=$ $=\begin{cases}\frac{k^3}{h} & \text{se } h\neq0\\ 0 & \text{se } h=0\end{cases}$, tuttavia non è continua (e dunque neppure differenziabile) perché $f\left(t^3,t^2\right)=\frac{t^{12}}{2t^{12}}\overset{t\to0}{\to}\frac{1}{2}\neq0.$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^4\right)^\alpha\left(1-e^{-xy}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ammette derivate parziali nell'origine perché è nulla lungo gli assi, inoltre ha le derivate direzionali $\iff\alpha\geq-\frac{1}{2}$ perché $\lim_{t\to0}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\left(t^2h^2+t^4k^4\right)^\alpha\left(1-e^{-t^2hk}\right)}{t}=$ $=\lim_{t\to0}\frac{\left(1-e^{-t^2hk}\right)}{t^2hk}\frac{t^2hk\left(t^2h^2+t^4k^4\right)^\alpha}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2hk\left(t^2h^2+t^4k^4\right)^\alpha}{t}=\lim_{t\to0}t^{2\alpha+1}\left(h^2+t^2k^4\right)^\alpha=$ $=\begin{cases}\pm\infty & \text{se } \alpha<-\frac{1}{2}\\ \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^4}} & \text{se } \alpha=-\frac{1}{2}\\ 0 & \text{se } \alpha>-\frac{1}{2}\end{cases}$; inoltre, è differenziabile solo per $\alpha>-\frac{1}{2}$ perché per $\alpha\leq-\frac{1}{2}$ la quantità $\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\left(h^2+k^4\right)^\alpha\left(1-e^{-hk}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ calcolata lungo $h=k^2$ vale $\frac{\left(k^4+k^4\right)^\alpha\left(1-e^{-k^3}\right)}{\sqrt{k^4+k^2}}=\frac{2^\alpha k^{4\alpha}\left(1-e^{-k^3}\right)}{|k|\sqrt{k^2+1}}$ e $\lim_{k\to0}\frac{2^\alpha k^{4\alpha}\left(1-e^{-k^3}\right)}{|k|\sqrt{k^2+1}}=\lim_{k\to0}\frac{2^\alpha k^{4\alpha}k^3}{|k|\sqrt{1+k^2}}=\lim_{k\to0}\frac{segno(k)2^\alpha k^{4\alpha+2}}{\sqrt{1+k^2}}\neq0$ se $\alpha\leq-\frac{1}{2}$, mentre $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^2+k^4\right)^\alpha\left(1-e^{-hk}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\left(h^2+k^4\right)^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{k^2}\left(h^2+k^4\right)^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^2+k^4\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{h^2+k^2}\left(h^2+k^4\right)^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$= \left(h^2+k^4\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$ se $\alpha > -\dfrac{1}{2}$; infine, la funzione è continua
$\iff \alpha > -\dfrac{3}{4}$ perché $f\left(y^2,y\right) = \left(y^4+y^4\right)^\alpha\left(1-e^{-y^3}\right) = 2^\alpha y^{4\alpha}\left(1-e^{-y^3}\right)$
e $\lim_{y\to0} 2^\alpha y^{4\alpha}\left(1-e^{-y^3}\right) = \lim_{y\to0} 2^\alpha y^{4\alpha+3} \ne 0$ se $\alpha \le -\dfrac{3}{4}$ mentre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$
$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\left(x^2+y^4\right)^\alpha$ e $\left|xy\left(x^2+y^4\right)^\alpha\right| = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+y^4\right)^\alpha \le$
$\le \left(x^2+y^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+y^4\right)^\alpha\left(x^2+y^4\right)^{\frac{4\alpha+3}{4}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ se $\alpha > -\dfrac{3}{4}$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente di classe C^1 su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, inoltre lo è anche nell'origine perché le derivate parziali nell'origine sono entrambe nulle e inoltre $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\dfrac{5x^4y\left(x^4+y^2\right)-4x^8y}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| = \dfrac{|y|\left(x^8+5x^4y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} =$
$= \dfrac{4|y|\left(\left(x^4\right)^2+5\left(x^4\right)\left(y^2\right)\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} \le \dfrac{|y|\left(\left(x^4+y^2\right)^2+5\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} = 6|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$
e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\dfrac{x^5\left(x^4+y^2\right)-2x^5y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| = \dfrac{|x|^5\left|x^4-y^2\right|}{\left(x^4+y^2\right)^2} \le \dfrac{|x|^5\left(\left|x^4\right|+\left|y^2\right|\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} = \dfrac{|x|\left(x^4\right)}{x^4+y^2} \le$
$\le \dfrac{|x|\left(x^4+y^2\right)}{x^4+y^2} = |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; tuttavia, la funzione non è di classe $\mathbb{C}^2$ nell'origine perché, se lo fosse, per il lemma di Schwartz si avrebbe
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ ma $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\dfrac{\frac{h^9}{h^8}-0}{h} = \lim_{h\to0}\dfrac{h^9}{h^9} = 1$
mentre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{k\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to0}\dfrac{0-0}{k} = 0$.

3. Essendo $f(x) \overset{\|x\|\to\infty}{\to} 0$, allora $\forall\epsilon>0\exists M>0$ tale che $\|x\|\ge M \Rightarrow |f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, inoltre per la compattezza della palla chiusa di raggio $M+1$ $\overline{B_{M+1}(0)}$, f è uniformemente continua su $\overline{B_{M+1}(0)}$ e quindi $\exists\delta>0$ tale che $\|x\|,\|y\|\le M+1, \|x-y\|\le\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\varepsilon$, dunque se $\|x-y\|\le\min\{\delta,1\}$ allora $\|x\|,\|y\|\le M+1$ oppure $\|x\|,\|y\|\ge M$ perché $\|x\|\le M \Rightarrow \|y\|\le\|x\|+\|y-x\|\le M+1$, dunque nel primo caso $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$ per l'uniforme continuità sul compatto $\overline{B_{M+1}(0)}$, mentre nel secondo $|f(x)-f(y)|\le|f(x)|+|f(y)|\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$; dunque, la continuità è uniforme su tutto $\mathbb{R}^n$.

4. Essendo $f(t,g(t))\equiv0\ \forall t\in\mathbb{R}$, allora definendo $\gamma(t)\in C^1\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^2\right)$ come $\gamma(t)=(t,g(t))$ si ha $\dot\gamma(t)=(1,g'(t))$ e dunque, per la regola di derivazione di funzioni composte, si ha $0=\dfrac{d}{dt}0=\dfrac{d}{dt}f(t,g(t))=\dfrac{d}{dt}f(\gamma(t))=\langle\nabla f(t,g(t)),\dot\gamma(t)\rangle=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,g(t))\dot\gamma_1(t)+$ $+\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,g(t))\dot\gamma_2(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,g(t))+\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,g(t))g'(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$, in particolare, es-

sendo $g(0)=0$, per $t=0$ si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)g'(0)=0$ e quindi, se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\neq 0$ allora $g'(0)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$.

5. (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ è ovviamente continua, perché composizione di funzioni continue, ma non ha le derivate parziali nell'origine perché $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ non esiste, e analogamente per l'altra derivata parziale.

   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ha le derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché è nulla lungo gli assi, ma non è continua perché $f(x,x)=\dfrac{1}{2}\overset{x\to 0}{\nrightarrow}0$.

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ha le derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché è nulla lungo gli assi, è continua perché $|f(x,y)|\leq\dfrac{|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=|x|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$.

   (d) $f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$ è differenziabile perché $\left|\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=$ $\dfrac{x^2\sin\left|\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$, ma $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-$ $-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\overset{(x,y)\to(0,0)}{\nrightarrow}0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzione del tutorato numero 5 (29 Ottobre 2010)
Massimi e minimi in più variabili

1. (a) I punti stazionari di $f(x,y)=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$ sono quelli in cui $\nabla f(x,y)=(0,0)$. $\nabla f(x,y)=\left(2x\left(y^2-1\right),2y\left(x^2-1\right)\right)=(0,0)\iff\begin{cases}2x\left(y^2-1\right)=0\\2y\left(x^2-1\right)=0\end{cases}$.
Le soluzioni del sistema sono $P_1=(0,0),P_2=(1,1),P_3=(-1,1),P_4=(-1,-1),P_5=(1,-1)$.
Per vedere se sono punti di massimo o di minimo occorre studiare la matrice hessiana della funzione $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2\left(y^2-1\right)&4xy\\4xy&2\left(x^2-1\right)\end{pmatrix}$: nell'origine la matrice hessiana è definita negativa, cioè ha entrambi gli autovalori negativi, perché $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$, quindi P_1 è un punto di massimo; Nei punti P_2,P_4 la matrice hessiana è $H_f(1,1)=H_f(-1,-1)=\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}$, che avendo determinante negativo ha autovalori di segno opposto e quindi P_2,P_4 non sono di massimo né di minimo; Nei punti P_3,P_5 la matrice hessiana ha la forma $H_f(-1,1)=H_f(1,-1)=\begin{pmatrix}0&-4\\-4&0\end{pmatrix}$ e analogamente i punti P_3,P_5 non sono massimi né minimi.

(b) $f(x,y)=x^4-4x^3+4x^2+y^4-2y^2$: i punti critici sono quelli che rispettano la condizione $\nabla f(x,y)=(0,0)$. $\nabla f(x,y)=\left(4x^3-12x^2+8x,4y^3-4y\right)=(0,0)\iff$ $\iff\begin{cases}4x^3-12x^2+8x=0\\4y^3-4y=0\end{cases}$. Il sistema ha soluzioni $P_1=(0,0),P_2=(0,-1),P_3=(0,1)$, $P_4=(1,-1),P_5=(1,0),P_6=(1,1),P_7=(2,-1),P_8=(2,0),P_9=(2,1)$.
Studio l'hessiana di $f(x,y)$ in questi punti: $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2+24x+8&0\\0&12y^2-4\end{pmatrix}$: P_1 non è di massimo né di minimo perchè l'hessiana ha autovalori di segno opposto in quanto $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$; P_2,P_3 sono di minimo relativo perchè l'hessiana calcolata nei punti è definita positiva, cioè ha entrambi gli autovalori positivi, perché $H_f(0,-1)=H_f(0,-1)\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$; P_4,P_6 non sono né massimi né minimi in quanto l'hessiana ha autovalori di segno opposto perché $H_f(1,1)=H_f(1,-1)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&8\end{pmatrix}$; P_7,P_9 sono di minimo relativo perchè la matrice hessiana è definita positiva perché $H_f(2,-1)=H_f(2,1)=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$; P_5 è di massimo relativo perchè l'hessiana è definita negativa, cioè ha entrambi gli autovalori negativi, perché $H_f(1,0)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$; infine, P_8 è di minimo perchè l'hessiana ha autovalori di segno opposto poiché $H_f(2,0)=\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$.

(c) $f(x,y)=y^4-y^3\cos x$. Cerco i punti di $\mathbb{R}^2$ che annullino il gradiente: $\nabla f(x,y)=\left(y^3\sin x, 4y^3-3y^2\cos x\right)=(0,0) \iff \begin{cases} y^3\sin x=0 \\ 4y^3-3y^2\cos x=0 \end{cases}$.

Il sistema ha per soluzioni la retta $y=0$ e i punti $P_k=\left(k\pi,(-1)^k\frac{3}{4}\right)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$.

L'hessiana di $f(x,y)$ è della forma $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} y^3\cos x & 3y^2\sin x \\ 3y^2\sin x & 12y^2-6y\cos x \end{pmatrix}$: nei punti $y=0$ la matrice hessiana è la matrice nulla perché $H_f(x,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque non si può dire nulla sulla natura dei punti; tuttavia, lungo la direzione $y=0$ la funzione è nulla e cambia di segno nell'intorno di ognuno di questi punti, dunque nessuno di questi è di massimo né di minimo locale; nei punti P_k l'hessiana è della forma $H_f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)=\begin{pmatrix} \frac{27}{64} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ e dunque i punti sono di minimo relativo.

(d) $f(x,y)=x(x-y)^4$.Il gradiente di $f(x,y)$ è $\nabla f(x,y)=\left((x-y)^4-4x(x-y)^3,-4x(x-y)^3\right)$, dunque i punti critici verificano $\begin{cases} (x-y)^4-4x(x-y)^3=0 \\ -4x(x-y)^3=0 \end{cases}$: se $x=0$, dalla prima equazione si ottiene $y=0$, mentre se $x\neq 0$ la seconda equazione equivale a $x=y$ e questi valori verificano anche la prima equazione, dunque i punti critici sono tutti e soli quelli della bisettrice del primo e terzo quadrante. La matrice Hessiana $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 8(x-y)^3+12x(x-y)^2 & -4(x-y)^3-12x(x-y)^2 \\ -4(x-y)^3-12x(x-y)^2 & 12x(x-y)^2 \end{pmatrix}$ non dà informazioni su nessuno dei punti stazionari perché è nulla in tutti questi punti in quanto $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; per quanto riguarda l'origine, lungo la traiettoria $y=0$ la funzione vale $f(x,0)=x^5$ che cambia segno segno intorno all'origine, dunque non è né un punto di massimo né di minimo; poiché nei punti di ascissa positiva $f(x,y)\geq 0$, essendo $f(x,x)=0\ \forall t\in\mathbb{R}$, i punti critici (x,x) con $t>0$ sono minimi; analogamente, i punti di ascissa negativa sono massimi perchè $f(x,y)\leq 0$ se $x<0$.

(e) $f(x,y)=\sin^2(xyz)$: $\nabla f(x,y,z)=(2yz\cos(xyz)\sin(xyz), 2xz\cos(xyz)\sin(xyz), 2xz\cos(xyz)\sin(xyz))$ si annulla in tutti e soli i punti $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tali che $xyz=\frac{k\pi}{2}$ per $k\in\mathbb{Z}$; per stabilire quali sono di massimo e quali di minimo è sufficiente notare che, essendo $0\leq\sin^2(xyz)\leq 1$, se $xyz=k\pi$ allora (x,y,z) è un minimo perché $f(x,y,z)=0$ mentre se $xyz=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ il punto (x,y,z) è di massimo perché $f(x,y,z)=1$.

2. (a) Cerco i massimi e i minimi locali di $f(x,y)=x^6-3x^2+y^2$, dunque determino i punti che annullano $\nabla f(x,y)=\left(6x^5-6x,2y\right)=0 \iff \begin{cases} 6x^5-6x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$: il sistema ha soluzioni $P_1=(0,0), P_2=(1,0), P_3=(-1,0)$, dunque studio l'hessiana di $f(x,y)$ in questi punti per capire se si tratta di massimi/minimi relativi o nessuno dei due: poiché $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 30x^4-6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

l'hessiana in $(0,0)$ è $H_F(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che ha autovalori di segno opposto e dunque l'origine non è nè di massimo nè di minimo relativo; nei punti P_2, P_3 l'hessiana $H_f(1,0) = H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva e dunque i punti sono di minimo relativo; resta da studiare il comportamento all'infinito della funzione: poiché $g(x) = x^6 - 3x^2$ è inferiormente limitata e $y^2 \overset{y\to\pm\infty}{\to} +\infty$ allora $f(x,y) = x^6 - 3x^2 + y^2 \overset{|y|\to\infty}{\to} +\infty$, analogamente $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^6 - 3x^2 + y^2 \geq \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^6 - 3x^2 = +\infty$ e dunque poichè $\|(x,y)\| \to \infty \Rightarrow |x| \to \infty$ oppure $|y| \to \infty$, trovo che $f(x,y) \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} +\infty$; dunque, $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, mentre l'estremo inferiore è un minimo e viene raggiunto in uno dei minimi locali della funzione, ma poiché $f(\pm 1, 0) = -2$, allora $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f = \min\limits_{\mathbb{R}^2} f = -2$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$. Cerco i punti che annullano il gradiente: $\nabla f(x,y) =$
$= \left(\dfrac{y\left(x^2+y^2+1\right) - 2x^2y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}, \dfrac{x\left(x^2+y^2+1\right) - 2xy^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \right) = (0,0) \iff$
$\begin{cases} \frac{y\left(x^2+y^2+1\right)-2x^2y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = 0 \\ \frac{x\left(x^2+y^2+1\right)-2xy^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\left(x^2+y^2+1\right) - 2x^2y = 0 \\ x\left(x^2+y^2+1\right) - 2xy^2 = 0 \end{cases}$; moltiplicando la prima equazione per y e la seconda per x si ottiene $\begin{cases} y^2\left(x^2+y^2+1\right) - 2x^2y^2 = 0 \\ x^2\left(x^2+y^2+1\right) - 2x^2y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2\left(x^2+y^2+1\right) = 2x^2y^2 \\ x^2\left(x^2+y^2+1\right) = 2x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2\left(x^2+y^2+1\right) =$
$= x^2\left(x^2+y^2+1\right) \iff x = \pm y$; sostituendo $x = \pm y$ nella prima equazione si ottiene $2x^4 + x^2 = 2x^4$, che ha $x = 0$ come unica soluzione, dunque l'unico punto stazionario è $(0,0)$, che non è né punto di massimo né di minimo relativo in quanto la funzione cambia segno attorno a quel punto; dunque, la funzione non ha massimo né minimo e i suoi estremi superiore e inferiore verranno raggiunti all'infinito; per determinarli, noto che $|f(x,y)| = \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}\right| \leq \left|\dfrac{x^2+y^2}{2\left(x^2+y^2+1\right)}\right| \leq \left|\dfrac{x^2+y^2+1}{2\left(x^2+y^2+1\right)}\right| = \dfrac{1}{2}$ e $f(x, \pm x) = \pm\dfrac{x^2}{2x^2+1} \overset{|x|\to\infty}{\to} \pm\dfrac{1}{2}$, dunque $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f = \dfrac{1}{2}$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f = -\dfrac{1}{2}$.

3. Studio massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = xy\left(1 - x^2 - y^2\right)$ nell'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\right\}$. Innanzi tutto, la funzione è nulla sul bordo del dominio e positiva all'interno, dunque $\min\limits_A f = 0$, mentre il massimo è raggiunto all'interno in un punto stazionario: $\nabla f(x,y) = \left(-2x^2y + y\left(1-x^2-y^2\right), -2xy^2 + x\left(1-x^2-y^2\right)\right) = (0,0) \iff$
$\iff \begin{cases} -2x^2y + y\left(1-x^2-y^2\right) = 0 \\ -2xy^2 + x\left(1-x^2-y^2\right) = 0 \end{cases}$; moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per y si ottiene la relazione $y^2\left(1-x^2-y^2\right) = 2x^2y^2 = x^2\left(1-x^2-y^2\right)$, da cui $\left(y^2-x^2\right)\left(1-x^2-y^2\right) = 0$; se $1-x^2-y^2 = 0$ si ottengono punti che non sono all'interno dell'insieme A, mentre se $x^2-y^2 = 0 \iff x = \pm y$, sostituendo nella prima equazione si ottiene $\mp x\left(4x^2-1\right) = 0$, da cui si

trovano i punti stazionari $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; tra questi, solo $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ è interno ad A, dunque $\max_A f = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

4. (a) $f(x,y) = e^{\sin(x)\cos(y)}$: essendo $\nabla f(x,y) = \left(\cos(x)\cos(y)e^{\sin(x)\cos(y)}, -\sin(x)\sin(y)e^{\sin(x)\cos(y)}\right)$ e $H_f(x,y) =$
$$= \begin{pmatrix} \cos(y)\left(\cos^2(x)\cos(y)-\sin(x)\right)e^{\sin(x)\cos(y)} & -\cos(x)\sin(y)(\sin(x)\cos(y)+1)e^{\sin(x)\cos(y)} \\ -\cos(x)\sin(y)(\sin(x)\cos(y)+1)e^{\sin(x)\cos(y)} & \sin(x)\left(\sin(x)\sin^2(y)-\cos(y)\right)e^{\sin(x)\cos(y)} \end{pmatrix}$$
allora $f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle + \frac{\langle H_f(0,0)(x,y),(x,y)\rangle}{2} + o\left(x^2+y^2\right) = 1+$
$$+\langle (1,0),(x,y)\rangle + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x,y),(x,y)\right\rangle}{2} + o\left(x^2+y^2\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2+y^2\right).$$

(b) $f(x,y) = \tan(x+y)$: $\nabla f(0,0) = \left.\left(\frac{1}{\cos^2(x+y)},\frac{1}{\cos^2(x+y)}\right)\right|_{(x,y)=(0,0)} = (1,1)$, $H_f(0,0) =$
$$= \left.\begin{pmatrix} 2\frac{\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} & 2\frac{\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} \\ 2\frac{\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} & 2\frac{\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y) = x + y + o\left(x^2+y^2\right).$$

5. (a) $\frac{\partial f^2}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\cdot f(x) = f(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)f(x) = 2f(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$, dunque x è un punto critico per $f^2 \iff 0 = \nabla\left(f^2\right)(x) = 2f(x_0)\nabla f(x_0) \iff f(x_0) = 0$ oppure $\nabla f(x_0) = 0$.

(b) $f(x_0) = 0 \Rightarrow f^2(x_0) = 0 \le f^2(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, dunque x_0 è un punto di minimo assoluto per f^2 e dunque è anche di minimo locale.

(c) Se x_0 è di massimo locale per f, allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \ge f(x) \forall x \in B_\delta(x)$, inoltre per la continuità di f in x_0 si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ \forall y \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, quindi per $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ si ha che $\exists \delta_{\frac{f(x_0)}{2}} > 0$ tale che $-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}\ \forall x \in B_{\delta_{\frac{f(x_0)}{2}}}(x_0)$, in particolare $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ e dunque ponendo $\bar{\delta} := \min\left\{\delta, \delta_{\frac{f(x_0)}{2}}\right\}$ ho che $f(x_0) \ge f(x) > 0 \Rightarrow f^2(x_0) \ge f^2(x) \forall x \in B_{\bar{\delta}}(x_0)$, cioè x_0 è di massimo locale per f^2.

(d) Se $\exists \delta > 0$ è tale che $f(x_0) \ge f(x) \forall y \in B_\delta(x_0)$, allora applicando la definizione di continuità di f in x_0 con $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0$ ho che $\exists \delta_{-\frac{f(x_0)}{2}} > 0$ tale che $\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < -\frac{f(x_0)}{2}\ \forall x \in B_{\delta_{-\frac{f(x_0)}{2}}}(x_0)$, in particolare $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$ e dunque ponendo $\bar{\delta} := \min\left\{\delta, \delta_{-\frac{f(x_0)}{2}}\right\}$ ho che $0 > f(x_0) \ge f(x) \Rightarrow f^2(x_0) \le f^2(x) \forall y \in B_{\bar{\delta}}(x_0)$, cioè x è di minimo locale per f^2.

(e) Se x_0 è di minimo locale per f e $f(x_0) > 0$ allora x_0 è di massimo locale per $-f$ e $-f(x_0) < 0$, dunque per il punto precedente x è di minimo locale per $(-f)^2 = f^2$.

(f) Se x_0 è di minimo locale per f e $f(x_0) < 0$ allora x_0 è di massimo locale per $-f$ e $-f(x_0) > 0$, dunque per il secondo punto x è di massimo locale per $(-f)^2 = f^2$.

(g) Se x_0 non è di massimo né di minimo locale allora $\forall\delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \in B_\delta(x_0)$ tali che $f(x_\delta) < f(x_0) < f(y_\delta)$; come nei punti precedenti $\exists\delta_{\frac{|f(x_0)|}{2}} > 0$ tale che $f(x_0)$ e $f(x)$ hanno lo stesso segno $\forall x \in B_{\delta_{\frac{|f(x_0)|}{2}}}(x_0)$; dunque ponendo $\bar\delta := \min\left\{\delta, \delta_{\frac{|f(x_0)|}{2}}\right\}$ si ha che $\forall\delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \in B_{\bar\delta}(x_0) \subset B_\delta(x_0)$ tali che $\begin{cases} 0 < f(x_\delta) < f(x_0) < f(y_\delta) \Rightarrow f^2(x_\delta) < f^2(x_0) < f^2(y_\delta) & \text{se } f(x_0) > 0 \\ f(x_\delta) < f(x_0) < f(y_\delta) < 0 \Rightarrow f^2(x_\delta) > f^2(x_0) > f^2(y_\delta) & \text{se } f(x_0) < 0 \end{cases}$ e quindi, qualunque sia il segno di $f(x_0)$, x_0 non è un massimo né un minimo per f^2.

6. $\nabla f(x) = g \iff \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{x_i}{\left(x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1\right)^2} \iff f(x_1, \dots, x_n) =$

$$= \int_0^{x_i} \frac{t}{\left(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + 1\right)^2} dt + c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) \overset{(y=t^2)}{=}$$

$$= \frac{\int_0^{x_i^2} \frac{dy}{\left(y + x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + 1\right)^2}}{2} + c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) =$$

$$= \frac{\left[-\frac{1}{y + x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2}\right]_0^{x_i^2}}{2} + c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) =$$

$$= \frac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2\right)} - \frac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)} + c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) + \dfrac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)} = \dfrac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2\right)} +$
$+ c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) = \dfrac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2\right)} + c_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_n)$
$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, dunque $c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) + \dfrac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2\right)}$ non dipende da x_j per alcun $j \neq i$ e quindi è costante cioè $c_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) +$
$+ \dfrac{1}{2\left(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2\right)} \equiv k_i$, ma poiché tale quantità è uguale $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, allora $k_i = k_j =: k$, dunque le possibili scelte per f sono $f(x) = k - \dfrac{1}{2\left(\|x\|^2 + 1\right)}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$; infine, f è lipschitziana perché, dal teorema del valor medio, $|f(x) - f(y)| \leq \sup\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\| \|x - y\|$ e $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \dfrac{\|x\|}{\left(\|x\|^2 + 1\right)} < +\infty$ perché $\sup\limits_{t \in [0, +\infty)} \dfrac{t}{\left(t^2 + 1\right)^2} < +\infty$ in quanto $\dfrac{t}{\left(t^2 + 1\right)^2} \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 6 (10 Novembre 2010)
Integrali dipendenti da parametro

1. $f(x)=\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2x}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{x}}\sin\left(x^2t^2\right)dt$. Posta $G(y,w,z)=\int_w^y\sin\left(z^2t^2\right)dt$ e $\gamma(x)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x},\frac{\sqrt{\pi}}{2x},x\right)$, allora $f(x)=G(\gamma(x))$, dunque $f'(x)=\langle\nabla G(\gamma(x)),\dot{\gamma}(x)\rangle$; inoltre, $z\to\sin^2\left(z^2t^2\right)$ è di classe C^1 e l'intervallo di integrazione limitato, dunque è lecito portare la derivata dentro segno di integrale e dunque $\nabla G(\gamma(x))=\left(\sin\pi,-\sin\frac{\pi}{4},\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2x}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{x}}2xt^2\cos\left(x^2t^2\right)dt\right)$ e pertanto, essendo $\dot{\gamma}(x)=\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{x^2},-\frac{\sqrt{\pi}}{2x^2},1\right)$, allora $f'(x)=\langle\nabla G(\gamma(x)),\dot{\gamma}(x)\rangle=\frac{\sqrt{2\pi}}{4x^2}+$ $+2x\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2x}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{x}}t^2\cos\left(x^2t^2\right)dt$.

2. $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\log\left(1+e^{xt}\right)dt$. Analogamente al primo esercizio, ponendo $G(y,w,z):=\int_w^y\log\left(1+e^{zt}\right)dt$ e $\gamma(t)=(\cos x,\sin x,x)$ si ha $f(x)=G(\gamma(x))$, inoltre è possibile derivare sotto segno di integrale perché l'integranda è C^1 e l'intervallo di integrazione limitato; dunque, $f'(x)=\langle\nabla G(\gamma(x)),\dot{\gamma}(x)\rangle=\Big\langle\log(1+e^{x\cos x}),$ $-\log(1+e^{x\sin x}),\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{te^{xt}}{1+e^{xt}}dt,(-\sin x,\cos x,1)\Big\rangle=-\sin(x)\log\left(1+e^{x\cos x}\right)-$ $-\cos(x)\log\left(1+e^{x\sin x}\right)+\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{te^{xt}}{1+e^{xt}}dt$, quindi in particolare per $x=0$ ho $f'(0)=-\log 2+\int_0^1\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}-\log 2$.

3. Sia $f(x,y)=\int_0^1e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt$: $\forall t\in\mathbb{R}$ fissato, l'integranda è di classe C^1 nelle variabili (x,y), inoltre l'intervallo di integrazione è limitato e dunque è possibile derivare sotto segno di integrale, cioè $\nabla f(x,y)=\left(\int_0^1\left(3x^2-3\right)t^2e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt,\right.$ $\left.\int_0^1 2yt^2e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt\right)$; poiché $\int_0^1e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt>0\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, gli unici punti critici della funzione sono quelli che annullano $\left(3x^2-3,2y\right)$, cioè $(0,\pm 1)$; per studiarne la natura è sufficiente calcolarne la matrice Hessiana, ma dal momento che l'integranda è C^2 e l'intervallo di integrazione limitato si possono calcolare le derivate seconde sotto integrale, ovvero $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\int_0^1\left(\left(3x^2-3\right)t^4+6xt^2\right)e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt & \int_0^1 2y\left(3x^2-3\right)t^4e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt\\ \int_0^1 2y\left(3x^2-3\right)t^4e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt & \int_0^1\left(4y^2t^4+2t^2\right)e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2}dt\end{pmatrix}$; essendo quindi $H_f(0,1)=\begin{pmatrix}\int_0^1 6t^2e^{-2t^2}dt & 0\\ 0 & \int_0^1 2t^2e^{-2t^2}dt\end{pmatrix}$ definita pos-

itiva e $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} \int_0^1 -6t^2e^{2t^2}dt & 0 \\ 0 & \int_0^1 2t^2e^{2t^2}dt \end{pmatrix}$ non definita, il primo punto è di minimo relativo mentre il secondo non é di massimo né di minimo.

4. (a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(xt)dt = \frac{-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-x\sin(xt)}{\cos(xt)}dt}{x} = -\frac{[\log|\cos(xt)|]_0^{\frac{\pi}{4}}}{x} = -\frac{\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right|}{x} =$
$= -\dfrac{\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{x}$ se $x \neq 0$, mentre ovviamente $f(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 0dt = 0$.

(b) $f'(x) = -\dfrac{-\frac{\pi}{4}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}x - \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{x^2} = \dfrac{\pi\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 4\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{4x^2}$ $\forall x \neq 0$,
mentre per $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}h\right)\right)}{h^2} = \lim_{h\to 0} -\frac{\frac{d}{dh}\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}h\right)\right)}{\frac{d}{dh}h^2} =$
$= \displaystyle\lim_{h\to 0} -\frac{-\frac{\pi}{4}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}h\right)}}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{32}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}h\right)}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}h\right)}{\frac{\pi}{4}h} = \frac{\pi^2}{32}$.

(c) Poiché $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ la funzione $x \to \tan(xt)$ è di classe C^1 l'intervallo di integrazione è limitato, allora $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dx}\tan(xt)dt = \frac{d}{dx}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(xt)dt =$
$= f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)+4\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}{4x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{32} & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

5. (a) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-xt^2}}{t}dt$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché è l'integrale di una funzione continua e limitata su un intervallo limitato, dal momento che $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-xt^2}}{t} = \lim_{t\to 0} xt\frac{1-e^{-xt^2}}{xt^2} = \lim_{t\to 0} xt = 0$.

(b) La funzione è di classe C^1 perché l'integranda è C^1 e l'intervallo di integrazione limitato, dunque per il teorema di derivazione sotto integrale si ha $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\frac{1-e^{-xt^2}}{t}dt = \int_0^1 te^{-xt^2}dt =$
$= \begin{cases} -\frac{1}{2x}\int_0^1\left(-2xte^{-xt^2}\right)dt = -\frac{\left[e^{-xt^2}\right]_0^1}{2x} = \frac{1-e^{-x}}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(c) Per il teorema fondamentale del calcolo, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(y)dy = \int_0^x \frac{1-e^{-y}}{2y}dy \Rightarrow$
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-y}}{2y}dy = +\infty$, perché $\dfrac{1-e^{-y}}{y}$ ha lo stesso andamento di $\dfrac{1}{y}$ per $y \to +\infty$; analogamente, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_0^{-\infty}\frac{1-e^{-y}}{y}dy =$
$-\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1-e^{-y}}{y}dy \overset{(z=-y)}{=} \int_0^{+\infty}\frac{e^z-1}{z}dz = +\infty$ perché $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\frac{e^z-1}{z} = +\infty$.

(d) $g(x,y) := f(xy)$ è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ perché è di classe C^1, in quanto composizione di $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $p \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ definita come $p(x,y) = xy$.

6. Sia $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t^3+t}dt$:

(a) $f\in C^1(\mathbb{R})$ perché l'integranda è di classe C^1 e inoltre per $x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ si ha $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{t^3+t}\right|\le\dfrac{|xt|}{t^3+t}\le\dfrac{|x_0|+\varepsilon}{t^2+1}$ che è integrabile in $[0,+\infty)$ e $\left|\dfrac{d}{dx}\dfrac{\arctan(xt)}{t^3+t}\right|=\left|\dfrac{t}{(x^2t^2+1)(t^3+t)}\right|=\dfrac{1}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}\le\dfrac{1}{t^2+1}$ che è integrabile.

(b) Per quanto visto al punto precedente, è possibile derivare sotto integrale e dunque $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{\arctan(xt)}{t^3+t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}=$ $=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1-x^2)(t^2+1)}+\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2t^2+1)}\right)dt=\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}+$ $+\displaystyle\frac{|x|}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{|x|}{|x|^2t^2+1}dt=\frac{1}{1-x^2}[\arctan t]_0^{+\infty}+\frac{|x|}{x^2-1}[\arctan(|x|t)]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\right.$ $\left.+\dfrac{|x|}{x^2-1}\right)=\dfrac{\pi(1-|x|)}{2(1-x^2)}=\dfrac{\pi}{2(|x|+1)}$ $\forall x\neq\pm1$; tuttavia, per il teorema di derivazione sotto integrale $f'(x)$ è continua, e dunque $f'(\pm1)=\lim\limits_{x\to\pm1}f'(x)=\dfrac{\pi}{4}$ e quindi la formula $f'(x)=\dfrac{\pi}{2(|x|+1)}$ vale $\forall x\in\mathbb{R}$.

(c) Poiché $f(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}0dt=0$, per il teorema fondamentale del calcolo si ha che $f(x)=f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(y)dy=$

$$=\begin{cases}\int_0^x\frac{\pi}{2(1+y)}=\left[\frac{\pi}{2}\log|1+y|\right]_0^x=\frac{\pi}{2}\log|1+x|=\frac{\pi}{2}\log(1+x) & \text{se } x\ge0\\ \int_0^x\frac{\pi}{2(1-y)}=\left[-\frac{\pi}{2}\log|1-y|\right]_0^x=-\frac{\pi}{2}\log|1-x|=-\frac{\pi}{2}\log(1-x) & \text{se } x<0\end{cases}.$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 7 (17 Novembre 2010)

Integrali dipendenti da parametro, successioni di funzioni

1. $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}dt$:

   (a) f è definita $\forall x\in\mathbb{R}$ perché l'integranda non ha asintoti e all'infinito $\log\left(x^2t^2+1\right)$ ha lo stesso andamento di $\log\left(x^2t^2\right)=2\log(xt)$, dunque l'integranda ha lo stesso andamento di $\dfrac{2\log(xt)}{t^2+1}$ che è integrabile all'infinito.

   (b) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché l'integranda è continua e per $x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ si ha $\left|\dfrac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}\right|\le\left|\dfrac{\log\left((|x_0|+\varepsilon)^2t^2+1\right)}{t^2+1}\right|$ che è integrabile.

   (c) f è integrabile $\forall x\neq 0$ perché l'integranda è derivabile e per $x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ $\left|\dfrac{d}{dx}\dfrac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}\right|=\left|\dfrac{2xt^2}{\left(x^2t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}\right|\le\dfrac{2(|x_0|+\varepsilon)t}{\left((|x_0|-\varepsilon)^2t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}$ che è integrabile; dunque, per il teorema di derivazione sotto integrale, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2xt^2}{\left(x^2t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}dt=\frac{2}{(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2t^2+1}dt+\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}=$ $=\dfrac{2}{(1-x^2)}[\arctan(xt)]_0^{+\infty}+\dfrac{2x}{x^2-1}[\arctan t]_0^{+\infty}=\dfrac{2}{(1-x^2)}\dfrac{\pi}{2}segno(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}\dfrac{\pi}{2}=$ $=\pi\left(\dfrac{segno(x)}{(1-x^2)}+\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\pi\dfrac{segno(x)-x}{(1-x^2)}=\begin{cases}\frac{\pi}{x+1} & \text{se } x>0\\ \frac{\pi}{x-1} & \text{se } x<0\end{cases}$; in realtà, avendo moltiplicato e diviso per x^2-1, questi calcoli sono validi $x\neq\pm1$, tuttavia essendo l'integranda di classe C^1 anche f è di classe C^1, e dunque $f'(\pm1)=\lim\limits_{x\to\pm1}f'(x)$ e quindi la formula per f' vale anche per questi punti.

   (d) Essendo $f(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}0dt=0$, allora per il teorema fondamentale del calcolo si ha $f(x)=f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(t)dt=$ $=\begin{cases}\int_0^x\frac{\pi}{t+1}dt=[\pi\log|t+1|]_0^x=\pi\log|x+1|=\pi\log(x+1) & \text{se } x>0\\ \int_0^x\frac{\pi}{t-1}dt=[\pi\log|t-1|]_0^x=\pi\log|x-1|=\pi\log(1-x) & \text{se } x<0\end{cases}=\pi\log(|x|+1);$ da questa espressione per f se ne può studiare la derivabilità nell'origine: la funzione non è derivabile perché $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\pi\log(1+|h|)}{h}$ non esiste in quanto tale quantità vale $\pi\dfrac{\log(1+h)}{h}\overset{h\to0}{\to}\pi$ se $h>0$ e $\pi\dfrac{\log(1-h)}{h}=-\pi\dfrac{\log(1-h)}{-h}\overset{h\to0}{\to}-\pi$ se $h<0$.

2. $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}dt$:

(a) Innanzi tutto, l'integranda non ha problemi in $t = 0$ perché $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} =$
$= \lim_{t\to 0} e^{-yt} \frac{e^{(y-x)t} - 1}{(y-x)t}(y-x) = y - x$; all'infinito, l'integrale converge per $x, y > 0$ perché un esponenziale di parametro negativo fratto un polinomio è integrabile; inoltre, per $(x, y) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ si ha $\left|\frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\right| \leq \frac{e^{-xt} + e^{-yt}}{t} \leq \frac{e^{-(x_0-\varepsilon)t} + e^{-(y_0-\varepsilon)t}}{t}$ che è integrabile, e dunque la funzione è continua; inoltre, l'integranda è di classe C^1 e $\begin{cases} \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\right| = |-e^{-xt}| \leq e^{-(x_0-\varepsilon)t} \\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\right| = |e^{-yt}| \leq e^{-(y_0-\varepsilon)t} \end{cases}$ che sono entrambe integrabili, dunque la funzione è di classe C^1.

(b) Per il teorema di derivazione sotto integrale, $\nabla f(x, y) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}dt,\right.$
$\left.\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}dt\right) = \left(\int_0^{+\infty} -e^{-xt}dt, \int_0^{+\infty} e^{-yt}dt\right) = \left(\left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}, \left[-\frac{e^{-yt}}{x}\right]_0^{+\infty}\right) =$
$= \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$

(c) Essendo $f(1, 1) = 0$, allora per il teorema fondamentale del calcolo $f(x, 1) = f(x, 1) - f(1, 1) = \int_1^x \frac{\partial f}{\partial x}(z, y)dz = \int_1^x -\frac{dz}{z} = [-\log|t|]_1^x = -\log|x| = -\log x$ e analogamente $f(x, y) = f(x, 1) + \int_1^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, w)dw = \log x + \int_1^y \frac{dw}{w} = -\log x + \log y = \log\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. (a) $f_n(x) = n^x \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, dunque la convergenza non è uniforme perché le f_n sono continue $\forall n \in \mathbb{N}$ mentre f non lo è; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, -\delta]$ $\forall \delta > 0$ perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]} |f_n(x) - f(x)| =$
$= \sup_{x\in(-\infty,-\delta]} n^x = n^{-\delta} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.

(b) $f_n(x) = \frac{\chi_{[n,n+1]}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} f(x) \equiv 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(c) $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2x^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, dunque la convergenza non è uniforme perché le f_n sono continue $\forall n \in \mathbb{N}$ mentre f non lo è; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$ perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\frac{\cos(nx)}{n^2x^2 + 1}\right| \leq \sup_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \frac{1}{n^2x^2 + 1} =$
$\frac{1}{n^2\delta^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(d) $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n'(x) = \frac{n - x^2}{(x^2 + n)^2} = 0 \iff x = \pm\sqrt{n}$, allora $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|f_n\left(\sqrt{n}\right)\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}$ converge puntualmente in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ per il criterio della radice ma non in $x=0$ perché si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 1=+\infty$; dunque, essendo la serie divergente al bordo, la convergenza non può essere uniforme (e dunque neanche totale, ma è uniforme (e totale) in $(-\infty,\delta]\cup[\delta,+\infty)$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|e^{-n^2x^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\delta^2}<+\infty$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(5x)^n}$ converge puntualmente in $\left(\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$ per il criterio della radice, mentre fuori da questo intervallo la serie diverge perché non è infinitesima; la convergenza non può essere uniforme (né totale) in $\left(\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$ perché non c'è convergenza al bordo, ma è totale (e uniforme) in $\left(\infty,-\frac{1}{5}-\delta\right]\cup\left[\frac{1}{5}+\delta,+\infty\right)$ perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\left(\infty,-\frac{1}{5}+\delta\right]\cup\left[\frac{1}{5}-\delta,+\infty\right)}\left|\frac{1}{1+(5x)^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(5\left(\frac{1}{5}+\delta\right)\right)^n}<+\infty$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-n\left|x^2-1\right|}}{n\log^2 n}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ perché $\sum_{n=2}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-n\left|x^2-1\right|}}{n\log^2 n}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}<+\infty$ perché, per il criterio di condensazione di Cauchy, ha lo stesso andamento di $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log^2(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log 2)^2}<+\infty$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\log\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right)^{\log n}=\sum_{n=2}^{\infty}e^{\log\frac{x^2-1}{x^2+1}\log n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\log n}\right)^{\log\frac{x^2-1}{x^2+1}}=$
$=\sum_{n=2}^{\infty}n^{\log\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ converge puntualmente $\iff \log\frac{x^2-1}{x^2+1}<-1 \iff \frac{x^2-1}{x^2+1}<\frac{1}{e} \iff x^2-1<$
$<\frac{x^2+1}{e} \iff x^2\left(1-\frac{1}{e}\right)<1+\frac{1}{e} \iff x^2<\frac{1+\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e+1}{e-1} \iff x\in\left(-\sqrt{\frac{e-1}{e+1}},\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$;
la convergenza non può essere uniforme perché non c'è convergenza ai bordi del dominio, ma è totale in $\left[-\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}-\delta,\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}+\delta\right]$ perché
$\sum_{n=2}^{\infty}\sup_{x\in\left[-\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}-\delta,\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}+\delta\right]}\left|\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\sup_{x\in\left[-\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}-\delta,\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}+\delta\right]}\left|n^{\log\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right|=$
$=\sum_{n=2}^{\infty}n^{\log\frac{\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}+\delta\right)^2-1}{\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}+\delta\right)^2+1}}<+\infty$.

5. (a) $f_n(x)=\arctan(nx)\overset{n\to\infty}{\to}f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{se } 0<x\le 1\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, e la convergenza non può essere uniforme perché le f_n sono funzioni continue mentre la funzione limite f non lo è.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \arctan(nx)dx = x\arctan(nx)|_0^1 - \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \arctan(n) -$
$\displaystyle -\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}dx = \arctan(n) - \frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)|_0^1 = \arctan(n) - \frac{\log(1+n^2x^2)}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2} =$
$\displaystyle = \int_0^1 \frac{\pi}{2}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$

6. È sufficiente considerare $f_n(x) = n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$ e $g_n(x) = n^2\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$; infatti, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ $\forall x \in [0,1]$ ma $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}dx = \int_0^{\frac{1}{n}} ndx = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1$ e $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 n^2\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}dx =$ $\displaystyle = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2dx = n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty.$

7. Sia $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{2}{\pi\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow g_n(x) = ng(nx) = \dfrac{2n}{\pi\left(n^2x^2+1\right)^2} \Rightarrow (f*g_n)(x) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g_n(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n|x-y|}{\pi\left(n^2y^2+1\right)^2}dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{2n(x-y)}{\pi\left(n^2y^2+1\right)^2}dy + \int_{x}^{+\infty} \frac{2n(y-x)}{\pi\left(n^2y^2+1\right)^2}dy =$$
$$= \frac{2n}{\pi}x\int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{\left(n^2y^2+1\right)^2} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{2n^2y}{\left(n^2y^2+1\right)^2}dy + \frac{1}{n\pi}\int_{x}^{+\infty} \frac{2n^2y}{\left(n^2y^2+1\right)^2}dy -$$
$$- \frac{2n}{\pi}x\int_{x}^{+\infty} \frac{dy}{\left(n^2y^2+1\right)^2} = \frac{2}{\pi}x\int_{-\infty}^{x} \frac{n}{n^2y^2+1}dy - \frac{n}{\pi}x\int_{-\infty}^{x} y\frac{2n^2y}{\left(n^2y^2+1\right)^2}dy - \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n^2y^2+1}\right]_{-\infty}^{x} +$$
$$+ \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n^2y^2+1}\right]_{x}^{+\infty} - \frac{2}{\pi}x\int_{x}^{+\infty} \frac{n}{n^2y^2+1}dy + \frac{n}{\pi}x\int_{x}^{+\infty} y\frac{2n^2y}{\left(n^2y^2+1\right)^2}dy = \frac{2}{\pi}x[\arctan(ny)]_{-\infty}^{x} -$$
$$- \frac{n}{\pi}x\left(\left[-\frac{y}{n^2y^2+1}\right]_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{n^2y^2+1}\right) + \frac{2}{n\pi\left(n^2x^2+1\right)} - \frac{2}{\pi}x[\arctan(ny)]_{x}^{+\infty} +$$
$$+ \frac{n}{\pi}x\left(\left[-\frac{y}{n^2y^2+1}\right]_{x}^{+\infty} + \int_{x}^{+\infty} \frac{dy}{n^2y^2+1}\right) = \frac{2}{\pi}x\arctan(nx) + x + \frac{nx^2}{\pi\left(n^2x^2+1\right)} +$$
$$- \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{n}{n^2y^2+1}dy + \frac{2}{n\pi\left(n^2x^2+1\right)} - x + \frac{2}{\pi}x\arctan(nx) + \frac{nx^2}{\pi\left(n^2x^2+1\right)} + \frac{x}{\pi}\int_{x}^{-\infty} \frac{n}{n^2y^2+1}dy =$$
$$= \frac{4}{\pi}x\arctan(nx) + \frac{2n^2x^2+2}{n\pi\left(n^2x^2+1\right)} - \frac{x}{\pi}[\arctan(ny)]_{-\infty}^{x} + \frac{x}{\pi}[\arctan(ny)]_{x}^{+\infty} = \frac{4}{\pi}x\arctan(nx) -$$
$$-2x + \frac{2nx^2}{\pi\left(n^2x^2+1\right)} - \frac{x}{\pi}\arctan(nx) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}\arctan(nx) = \frac{2}{\pi}x\arctan(nx) + \frac{2}{n\pi},$$

dunque $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g_n)x - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2}{\pi}x\arctan(nx) + \frac{2}{n\pi} - |x|\right| \leq$
$\displaystyle\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2}{\pi}x\arctan(nx) - |x|\right| + \frac{2}{n\pi} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2}{\pi}|x||\arctan(nx)| - \frac{2}{\pi}|x|\frac{\pi}{2}\right| + \frac{2}{n\pi} =$
$\displaystyle= \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\left(\frac{\pi}{2} - |\arctan(nx)|\right) + \frac{2}{n\pi}$; poiché la quantità dipendente da x è sempre maggiore o uguale a 0 e si annulla nell'origine, l'estremo superiore non potrà essere raggiunto in $x = 0$ e dunque si può applicare la disuguaglianza suggerita nel testo con $t = \dfrac{1}{nx}$, e quindi $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g_n)x - f(x)| \leq$
$$\leq \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\left(\frac{\pi}{2} - |\arctan(nx)|\right) + \frac{2}{n\pi} \leq \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\left|\arctan\left(\frac{1}{nx}\right)\right| + \frac{2}{n\pi} \leq \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\left|\frac{1}{nx}\right| + \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{n\pi} +$$
$$+ \frac{2}{n\pi} = \frac{4}{n\pi} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 8 (24 Novembre 2010)

Successioni di funzioni, spazi metrici, contrazioni

1. (a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac12}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}dx$: poiché $\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}dx \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{(1-x)^2}$ uniformemente, in quanto $\sup_{x\in\left[0,\frac12\right]}\left|\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac12\right]}\left|\frac{e^{\frac{x}{n}}-1}{(1-x)^2}\right| \le \sup_{x\in\left[0,\frac12\right]}\frac{\left|e^{\frac{x}{n}}-1\right|}{\left(1-\frac12\right)^2} =$ $= 4\sup_{x\in\left[0,\frac12\right]}\left|e^{\frac{x}{n}}-1\right| = 4\left|e^{\frac{1}{2n}}-1\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque è possibile portare il limite dentro l'integrale e pertanto $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac12}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}dx = \int_0^{\frac12}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}dx =$ $= \int_0^{\frac12}\frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^{\frac12} = \frac{1}{1-\frac12}-1 = 1.$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}dx$; poiché $\frac{nxe^{-nx}}{1+nx} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ uniformemente in $[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, in quanto $\sup_{x\in[\delta,+\infty)}\left|\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}\right| \le \sup_{x\in[\delta,+\infty)}\left|\frac{(1+nx)e^{-nx}}{1+nx}\right| = \sup_{x\in[\delta,+\infty)}e^{-nx} = e^{-n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e $\left|\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}\right| \le e^{-nx} \le e^{-x}$ che è integrabile su $[0,+\infty)$, allora è possibile passare al limite sotto integrale e dunque $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}dx =$ $= \int_0^{+\infty}0dx = 0.$

   (c) $\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\cos^2(n\pi x)dx$: poiché $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\cos^2(n\pi x)dx$ converge totalmente in quanto $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|e^{-n}\cos^2(n\pi x)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n} < +\infty$, è possibile scambiare serie e integrale e dunque $\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\cos^2(n\pi x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 e^{-n}\cos^2(n\pi x)dx =$ $= \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\int_0^1\frac{\cos(2n\pi x)+1}{2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\left[\frac{\sin(2n\pi x)}{4n\pi}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac1e\right)^n = \frac12\frac{\frac1e}{1-\frac1e} =$ $= \frac{e}{2(e-1)}.$

   (d) $\int_1^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{(n+1)n^x}dx$: poiché $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{(n+1)n^x}$ è a termini positivi e converge totalmente, in quanto $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\frac{\log n}{(n+1)n^x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n(n+1)} < +\infty$, è possibile scambiare serie e integrali, dunque $\int_1^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{(n+1)n^x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\log n}{(n+1)n^x}dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} \int_1^{+\infty} n^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} \int_1^{+\infty} e^{-x \log n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} \left[\frac{e^{-x \log n}}{-\log n} \right]_1^{+\infty} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} \frac{e^{-\log n}}{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

2. (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

   (b) $f_n(x) \to 0$ uniformemente perchè $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| =$
   $= \left| f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $f_n'(x)$ invece non converge uniformemente perchè la funzione limite è discontinua, ma la convergenza è uniforme in $(-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$, perché $f_n''(x) = \frac{2nx\left(nx^2-3\right)}{(1+nx^2)^2} = 0 \iff x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3n}}$
   e dunque per $n \geq \frac{1}{3\delta^2}$ ho che $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \right| = \left| \frac{1-n\delta^2}{(1+n\delta^2)^2} \right| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

   (c) Essendo $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = (0)' = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
   allora $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \ \forall x \neq 0$.

3. T è una contrazione perché $|(Tf)(x) - (Tg)(x)| = \left| \int_0^1 \arctan(xyf(y)) - \arctan(xyg(y)) dy \right| \leq$
   $\leq \int_0^1 |\arctan(xyf(y)) - \arctan(xyg(y))| dy \leq \int_0^1 |xyf(y) - xyg(y)| \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dt} \arctan t \right| dy =$
   $|x| \int_0^1 |y||f(y)-g(y)| \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{t^2+1} \right| dy \leq \int_0^1 |y|f(y)-g(y)|dy \leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 y dy = \frac{\|f-g\|_\infty}{2}$
   $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \|Tf - Tg\| = \sup_{x\in[0,1]} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| \leq \frac{\|f-g\|_\infty}{2}$.

4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$:

   (a) $|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} \right| = \left| \frac{x^2+1-\left(y^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} \right| < \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}} = \frac{|x+y||x-y|}{|x|+|y|} \leq$
   $\leq \frac{(|x|+|y|)|x-y|}{|x|+|y|} = |x-y|$.

   (b) Se per assurdo esistesse un punto fisso $\bar{x}$ per f, allora $\bar{x} = f(\bar{x}) = \sqrt{\bar{x}^2+1} \Rightarrow \bar{x}^2 = \bar{x}^2 + 1 \Rightarrow 0 = 1$, che è assurdo.

5. $x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases} \Rightarrow x_n = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}, \ldots, \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, 0, \ldots\right)$.

   (a) $x_n \in \ell_p$ perché $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^p = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \right|^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < +\infty$.

(b) x_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_q$ perché $n \neq m \Rightarrow (x_n - x_m)(k) =$
$= \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq \min\{n,m\} \text{ oppure } k > \max\{n,m\} \\ \frac{1}{k} & \text{se } m < k \leq n \\ -\frac{1}{k} & \text{se } n < k \leq m \end{cases}$ e dunque $\|x_n - x_m\|_q =$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_m(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=\min\{n,m\}+1}^{\max\{n,m\}} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=\min\{n,m\}+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} -$$

$$-\left(\sum_{k=\min\{n,m\}+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\sum_{k=1}^{\min\{n,m\}+1} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} \overset{n,m\to\infty}{\to} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

perché $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}} < +\infty$ in quanto $\frac{q}{p} > 1$.

(c) $x_n \overset{\|\cdot\|_q}{\to} x$, ove $x(k) = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow x = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}, \ldots, \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}, \ldots\right)$, perché

$$\|x_n - x\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} \overset{n\to\infty}{\to} 0;$$ tuttavia,

$x \notin \ell_p$ perché $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$; dunque, per l'unicità del limite, x_n non converge ad alcun elemento di ℓ_p rispetto a $\|\cdot\|_q$; dunque, $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ non è completo perché x_n è una successione di Cauchy che non converge.

6. (a) Applicando la disuguaglianza di Young $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ $\forall s,t > 0$ con

$s = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $t = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$ si ottiene che $\frac{|f(x)||g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq$

$\leq \frac{|f(x)|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q\int_a^b |f(x)|^p dx}$, dunque integrando tra $-\infty$ e $+\infty$

si ha $\frac{\int_a^b |f(x)||g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q}{q\int_a^b |f(x)|^p dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$

dunque $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$

(b) $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \leq$

$\leq \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} +$$

$$+\left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \left(\left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)||g(y)|dy \right)^p dx = \int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}} dy \right)^p dx \leq$

$$\leq \int_{-n}^{n} \left(\left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-k}^{k} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p dx =$$

$$= \int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) \left(\int_{-k}^{k} |g(y)| dy \right)^{\frac{p}{q}} dx =$$

$$= \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx =$$

$$= \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-k}^{k} \left(\int_{-n}^{n} |f(x-y)|^p |g(y)| dx \right) dy =$$

$$= \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-k}^{k} |g(y)| \left(\int_{-n}^{n} |f(x-y)|^p dx \right) dy \leq$$

$$\leq \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-k}^{k} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p dx \right) dy \overset{(z=x-y)}{=}$$

$$= \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-k}^{k} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^p dz \right) dy =$$

$$= \left(\int_{-k}^{k} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^p dz \right) \int_{-k}^{k} |g(y)| dy \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^p dz \right) \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy =$$

$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \right)^{1+\frac{p}{q}=p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=p}$; inoltre, poste $I_k(x) = \int_{-k}^{k} |f(x-y)||g(y)|dy$ e $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy$, ho che $I_k \overset{k\to\infty}{\to} I$ uniformemente in $[-n,n]$, perché $\sup_{x\in[-n,n]} |I_k(x)-I(x)| = \sup_{x\in[-n,n]} \left| \int_{-k}^{k} |f(x-y)||g(y)|dy - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right| =$
$= \sup_{x\in[-n,n]} \left(\int_{-\infty}^{-k} |f(x-y)||g(y)|dy + \int_{k}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right) \leq \sup_{x\in[-n,n]} \left(\int_{-\infty}^{-k} h_n(y)dy + \right.$
$\left. + \int_{k}^{+\infty} h_n(y)dy \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(y)dy - \int_{-k}^{k} h_n(y)dy \overset{k\to\infty}{\to} 0$ perché h_n è integrabile, dunque $(I_k(x))^p \overset{k\to\infty}{\to} (I(x))^p$ uniformemente in $[-n,n]$ perché, essendo $|u^p - v^p| \leq \sup_{s\in[u,v]} \left| \frac{d}{dt} t^p \right| |u-v| = \sup_{s\in[u,v]} \left(pt^{p-1} \right) |u-v| = pv^{p-1}|u-v| \; \forall 0 \leq u \leq v,$

allora $|(I(x))^p-(I_k(x))^p|\le p|I(x)|^{p-1}|I_k(x)-I(x)|\le p|I(x)|^{p-1}\sup_{x\in[-n,n]}|I_k(x)-I(x)|=$

$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|g(y)|dy\right)^{p-1}\sup_{x\in[-n,n]}|I_k(x)-I(x)|\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(y)dy\right)^{p-1}\sup_{x\in[-n,n]}|I_k(x)-I(x)|$

e quindi $\sup_{x\in[-n,n]}|(I(x))^p-(I_k(x))^p|\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(y)dy\right)^{p-1}\sup_{x\in[-n,n]}|I_k(x)-I(x)|\overset{k\to\infty}{\to}0;$

pertanto è lecito passare al limite sotto integrale e dunque $\int_{-n}^{n}\left(\int_{-k}^{k}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx\overset{k\to\infty}{\to}$

$\to\int_{-n}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx$, quindi $\int_{-\infty}^{+\infty}|(f*g)(x)|^p dx=$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy\right|^p dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx=$

$=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx=$

$=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-k}^{k}|f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|dy\right)^p\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|(f*g)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx\right).$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 9 (1 Dicembre 2010)
Contrazioni, equazioni differenziali

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2+1 \\ x(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = x^2(t)+1 \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{x^2(t)+1} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)+1} ds \overset{(x=x(s))}{=}$
$= \displaystyle\int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_1^{x(t)} = \arctan(x(t)) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctan(x(t)) = t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x(t) =$
$= \tan\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = x^2(t) \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds \overset{(x=x(s))}{=} \int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2} =$
$= \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^{x(t)} = 1 - \dfrac{1}{x(t)} \Rightarrow \dfrac{1}{x(t)} = 1 - t \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x+t \\ x(0)=0 \end{cases}$ è un'equazione del tipo $\dot{x}(t) = a(t)x(t)+b(t)$, dunque
la soluzione è $x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}\left(x(0) + \displaystyle\int_0^t b(s) e^{-\int_0^s a(u)du}\right) = e^{-\int_0^t ds}\left(0 + \displaystyle\int_0^t s e^{\int_0^s du}\right) =$
$= e^{-t}\displaystyle\int_0^t s e^s = e^{-t}\left([se^s]_0^t - \int_0^t e^s ds\right) = e^{-t}\left(te^t - [e^s]_0^t\right) = e^{-t}\left(te^t - e^t + 1\right) = t - 1 + e^{-t}$.

(d) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t+1} + t^2 + t \\ x(0)=0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{\int_0^t \frac{ds}{s+1}} \displaystyle\int_0^t \left(s^2+s\right) e^{-\int_0^s \frac{du}{u+1}} ds =$
$= e^{\log|s+1|_1^t} \displaystyle\int_0^t \left(s^2+s\right) e^{-\log|u+1|_1^s} ds = e^{\log(t+1)} \int_0^t \left(s^2+s\right) e^{-\log(s+1)} ds =$
$= (t+1)\displaystyle\int_0^t \left(s^2+s\right)\frac{1}{s+1} ds = (t+1)\int_0^s s ds = \frac{t^2}{2}(t+1) = \frac{t^3+t^2}{2}$.

(e) $\begin{cases} \dot{x} = tx + t^3 \\ x(0)=2 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{\int_0^t s ds}\left(2 + \displaystyle\int_0^t s^3 e^{-\int_0^s u du} ds\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(2 + \displaystyle\int_0^t s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\,(2+$
$+ \left[-s^2 e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_0^t - 2\displaystyle\int_0^t s e^{-\frac{s^2}{2}} ds\Bigg) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(2 - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\left[e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_0^t\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\Big(2 - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} +$
$+2) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(4 - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = 4e^{\frac{t^2}{2}} - t^2 - 2$.

(f) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = e^{x(t)+t} = e^{x(t)}e^t \Rightarrow \dot{x}(t)e^{-x(t)} = e^t \Rightarrow e^t - 1 = \displaystyle\int_0^t e^s ds =$
$= \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s) e^{-x(s)} ds \overset{(x=x(s))}{=} \int_0^x e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{x(t)} = 1 - e^{-x(t)} \Rightarrow e^{-x(t)} = 2 - e^t \Rightarrow -x(t) =$
$= \log\left(2-e^t\right) \Rightarrow x(t) = -\log\left(2-e^t\right)$.

(g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{x+t} \\ x(0)=0 \end{cases}$: la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema, dunque la soluzione è $x(t) \equiv 0\ \forall t$.

(h) $\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos x \sin t \cos t \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = \sin(x(t))\cos(x(t))\sin t \cos t \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{\sin(x(t))\cos(x(t))} =$

$= \sin t \cos t \Rightarrow \dfrac{\sin^2 t}{2} = \displaystyle\int_0^t \sin s \cos s ds = \int_0^t \dfrac{\dot{x}(s)}{\sin(x(s))\cos(x(s))} \overset{(x=x(s))}{=}$
$= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \dfrac{dx}{\sin x \cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) dx = [-\log|\cos x| +$
$+ \log|\sin x|]_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} = [\log|\tan(x)|]_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} = \log|\tan(x(t))| \Rightarrow |\tan(x(t))| = e^{\frac{\sin^2 t}{2}} \Rightarrow x(t) =$
$= \arctan\left(e^{\frac{\sin^2 t}{2}}\right)$, ove il segno positivo è stato scelto per via della condizione iniziale.

(i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + \sin t \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 3 \end{cases}$: ponendo $y = \dot{x}$ l'equazione diventa $\begin{cases} \dot{y} = y + \sin t \\ y(0) = -1 \\ x(0) = 3 \end{cases}$,

dunque dal teorema fondamentale del calcolo $x(t) = x(0) + \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s) ds = -1 + \int_0^t y(s) ds$
mentre $y(t)$ risolve un'equazione analoga a quella dei punti c - d - e,
dunque $y(t) = e^t \left(3 + \displaystyle\int_0^t e^{-s} \sin s ds\right) = e^t \left(3 + \left[-e^{-s}\sin s\right]_0^t + \int_0^t e^{-s}\cos s ds\right) = e^t \,(3-$
$-e^{-t}\sin t + \left(\left[-e^{-s}\cos s\right]_0^t - \displaystyle\int_0^t e^{-s}\sin s ds\right)\Big) = e^t \,(3 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1-$
$- \displaystyle\int_0^t e^{-s}\sin s ds\Big) \Rightarrow \int_0^t e^{-s}\sin s ds = \dfrac{1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t}{2} \Rightarrow y(t) = e^t \,(3+$
$+ \dfrac{1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t}{2}\Big) = \dfrac{7}{2}e^t - \dfrac{\sin t}{2} - \dfrac{\cos t}{2} \Rightarrow x(t) = -1 + \displaystyle\int_0^t y(s) ds = -1+$
$+ \displaystyle\int_0^t \left(\dfrac{7}{2}e^s - \dfrac{\sin s}{2} - \dfrac{\cos s}{2}\right) ds = -1 + \left[\dfrac{7}{2}e^s + \dfrac{\cos s}{2} - \dfrac{\sin s}{2}\right]_0^t = \dfrac{7}{2}e^t + \dfrac{\cos t}{2} - \dfrac{\sin t}{2} - 4.$

2. (a) $f(x) = |x| \Rightarrow f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{inx}$, ove $f_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$,

dunque $\hat{f}_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$,

mentre per $n \neq 0$ si ha $\hat{f}_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -x e^{-inx} dx + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x e^{-inx} dx =$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{-x e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} - \dfrac{1}{in}\displaystyle\int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx\right) + \dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{x e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{in}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-inx} dx\right) =$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi e^{in\pi}}{in} - \dfrac{1}{in}\left[\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0}\right) + \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \dfrac{1}{in}\left[\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{in}\left[\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} -\right.$
$\left. -\dfrac{1}{in}\left[\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{e^{-in\pi}-1}{n^2} - \dfrac{1-e^{in\pi}}{n^2}\right) = \dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$, quindi

$|x| = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{0\neq n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} e^{inx}$; calcolando in $x = 0$ si ottiene $0 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{0\neq n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} =$
$= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{-k} - 1}{\pi(-k)^2} = \dfrac{\pi}{2} +$
$+ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{2k} - 1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{2k+1} - 1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(b) $f(x) = (\pi - |x|)^2 \Rightarrow \hat{f}_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 - 2\pi|x| + \pi^2\right) dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x^2 - 2\pi x + \pi^2\right) dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi^2 x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3};\ n \neq 0 \Rightarrow \hat{f}_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (\pi + x)^2 e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 e^{-inx} dx \overset{(y=x+\pi, z=x-\pi)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y^2 e^{-in(y-\pi)} dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} z^2 e^{-in(z+\pi)} dz = \frac{e^{in\pi}}{2\pi}\int_0^{\pi} y^2 e^{-iny} dy + \frac{e^{-in\pi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} z^2 e^{-inz} dz =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{\pi} y^2 e^{-iny} dy + \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} z^2 e^{-inz} dz = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\left[\frac{x^2 e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{\pi^2 e^{-in\pi} - \pi^2 e^{in\pi}}{-in} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{in}\left(\left[\frac{x e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx\right)\right) = \frac{(-1)^n}{in\pi}\left(\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} - \frac{1}{in}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{in\pi}\left(\frac{(-1)^n 2\pi}{-in} - \frac{1}{in}\frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{-in}\right) = \frac{2}{n^2} \Rightarrow (\pi - |x|)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{0 \neq n = -\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2};$$

calcolando in $x = 0$ si ottiene $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{0 \neq n = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{3} +$

$$+2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-k)^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6};$$

analogamente, calcolando in $x = \pi$ si ottiene $0 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{0 \neq n = -\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x\}$ e $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{f(t)}{2}} dt$.

(a) Se $f_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$ e $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f$, allora in particolare $f_n(x) \to f(x) \forall x \in [0,1]$, perché la convergenza uniforme implica quella puntuale, ma poiché per ipotesi $0 \leq f_n(x) \leq 1$, passando al $\lim\limits_{n\to\infty}$ si ottiene $0 \leq f(x) \leq 1$, cioè $f \in X$; dunque, X è chiuso, perché contiene il limite di ogni sua successione convergente.

(b) Se $0 \leq f(x) \leq 1$, allora $0 \leq \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{f(t)}{2}} dt \leq \int_0^x 1 dt = x \leq 1$, dunque $f \in X \Rightarrow \Phi(f) \in X$, cioè $\Phi(X) \subset X$; inoltre, Φ è una contrazione perché $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{f(t)}{2}} - e^{-\frac{g(t)}{2}} dt\right| \leq \int_0^x \left|e^{-\frac{f(t)}{2}} - e^{-\frac{g(t)}{2}}\right| dt \leq$

$$\leq \int_0^x \sup_{s \in [0,1]} \left|\frac{d}{ds} e^{-\frac{s}{2}}\right| |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 \sup_{s \in [0,1]} \left|-\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{2}\right| \|f - g\|_\infty dt = \|f - g\|_\infty \int_0^1 \frac{dt}{2} \leq$$

$\leq \dfrac{\|f-g\|_\infty}{2} \Rightarrow \|\Phi(f)-\Phi(g)\| \leq \dfrac{\|f-g\|_\infty}{2}$.

(c) Essendo Φ una contrazione, ha un unico punto fisso, cioè $\exists f \in X$ tale che $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{f(t)}{2}}\,dt$: questo equivale a dire che $\begin{cases} f'(x) = e^{-\frac{f(x)}{2}} \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)e^{\frac{f(x)}{2}} = 1 \Rightarrow x =$
$= \displaystyle\int_0^x dt = \int_0^x f'(t)e^{\frac{f(t)}{2}}\,dt \overset{(y=f(t))}{=} \int_0^{f(x)} e^{\frac{y}{2}}\,dy = \left[2e^{\frac{y}{2}}\right]_0^{f(x)} = 2e^{\frac{f(x)}{2}} - 2 \Rightarrow 2e^{\frac{f(x)}{2}} = x+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{\frac{f(x)}{2}} = \dfrac{x+2}{2} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{2} = \log\left(\dfrac{x+2}{2}\right) \Rightarrow f(x) = 2\log\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$.

4. Posta $\Phi(x) = \sin\left(\sqrt{x+1}\right)$, si ha che $\Phi([0,1]) \subset [0,1]$ perché $\sin t \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2} \leq \pi \Rightarrow \sin\left(\sqrt{x+1}\right) \geq 0$; inoltre, è una contrazione perché $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| = \left|\sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{y+1}\right)\right| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\dfrac{d}{dt}\sin\left(\sqrt{t+1}\right)\right| |x-y| =$
$= \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\dfrac{d}{dt}\sin\left(\sqrt{t+1}\right)\right| |x-y| = \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\dfrac{\cos\left(\sqrt{t+1}\right)}{2\sqrt{t+1}}\right| |x-y| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}\right| |x-y| \leq \dfrac{|x-y|}{2}$;
dunque, essendo una contrazione, Φ ha un'unico punto fisso su $[0,1]$, cioé $\exists! x \in [0,1]$ tale che $\sin\left(\sqrt{x+1}\right) = \Phi(x) = x$.

5. $\begin{cases} x_0 = a \geq 0 \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$: posta $\Phi(x) = \dfrac{1}{x+2}$, si ha che $\Phi([0,+\infty)) \subset [0,+\infty)$, inoltre $|\Phi(x)-\Phi(y)| \leq \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{t+2}\right| |x-y| = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left|-\dfrac{1}{(t+2)^2}\right| |x-y| = \dfrac{|x-y|}{4}$,
dunque, essendo $[0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ chiuso, Φ è una contrazione e pertanto $\exists! x \in [0,+\infty)$ tale che $\Phi(x) = x$, ottenuta come il limite della successione $x_n = \Phi(x_{n-1})\ \forall x_0 \in [0,+\infty)$; quindi l'equazione di partenza è l'unica soluzione non negativa dell'equazione $\dfrac{1}{x+2} = \Phi(x) = x \iff 1 = x(x+2) \iff x^2+2x-1 = 0 \iff x =$
$= -1 \pm \sqrt{2}$, la cui unica soluzione non negativa appunto è $\sqrt{2}-1$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI TUTORATO NUMERO 10 (9 DICEMBRE 2010)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{e^{x(t)}} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{x(s)}{e^{x(s)}} ds \overset{(x=x(s))}{=} \int_{x_0}^{x(t)} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_{x_0}^{x(t)} = e^{-x_0} -$
$-e^{-x(t)} \Rightarrow e^{-x(t)} = e^{-x_0} - t \Rightarrow -x(t) = \log\left(e^{-x_0} - t\right) \Rightarrow x(t) = -\log\left(e^{-x_0} - t\right)$,
che è definita $\iff e^{-x_0} - t > 0$, dunque l'intervallo massimale di esistenza è $\left(-\infty, e^{-x_0}\right)$.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio per il sistema, dunque se $x_0 = 0$, la soluzione è $x(t) \equiv 0 \forall t \in \mathbb{R}$; se $x_0 \neq 0$, per l'unicità della soluzione dev'essere $x(t) \neq 0 \forall t$, dunque $x_0 > 0 \Rightarrow x(t) > 0 \forall t \Rightarrow \dot{x}(t) = x(t) \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds =$
$= \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)} \overset{(x=x(s))}{=} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{x_0}^{x(t)} = \log(x(t)) - \log(x_0) \Rightarrow \log(x(t)) = \log(x_0) + t \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = e^{\log(x_0)+t} = e^{\log(x_0)} e^t = x_0 e^t$, mentre se $x_0 < 0$ allora $x(t) < 0 \forall t$,
dunque $\dot{x}(t) = -x(t) \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t -\frac{\dot{x}(s)}{x(s)} \overset{(x=x(s))}{=} \int_{x_0}^{x(t)} -\frac{dx}{x} = [-\log|x|]_{x_0}^{x(t)} = \log(x_0) -$
$-\log(x(t)) \Rightarrow \log(x(t)) = \log(x_0) - t \Rightarrow x(t) = e^{\log(x_0)-t} = e^{\log(x_0)} e^{-t} = x_0 e^{-t}$;
in ogni caso la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$, ovvero l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è tutto $\mathbb{R}$.

   (c) $\begin{cases} \dot{x} = x - \cos t \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{\int_0^t ds}\left(x_0 + \displaystyle\int_0^t -e^{-\int_0^s du} \cos s ds\right) = e^t \left(x_0 - \int_0^t e^{-s} \cos s ds\right) =$
$= e^t \left(x_0 - \left(\left[-e^{-s}\cos s\right]_0^t - \displaystyle\int_0^t e^{-s} \sin s ds\right)\right) = e^t \left(x_0 + e^{-t}\cos t - 1 + \int_0^t e^{-s}\sin s ds\right) =$
$= e^t \left(x_0 + e^{-t}\cos t - 1 + \left(\left[-e^{-s}\sin s\right]_0^t + \displaystyle\int_0^t e^{-s}\cos s ds\right)\right) = e^t \left(x_0 + e^{-t}\cos t - 1 - e^{-t}\sin t +\right.$
$\left. + \displaystyle\int_0^t e^{-s}\cos s ds\right) \Rightarrow \int_0^t e^{-s} \cos s ds = \frac{e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1}{2} \Rightarrow x(t) = e^t \left(x_0 -\right.$
$\left. -\dfrac{e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1}{2}\right) = \left(x_0 - \dfrac{1}{2}\right) e^t - \dfrac{\sin t}{2} + \dfrac{\cos t}{2}$, che è definita su tutto $\mathbb{R}$ per ogni scelta del dato iniziale.

   (d) $\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x \sin^2 t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ è un punto di equilibrio, e in questi casi la soluzione è $x(t) \equiv x_0 \forall t \in \mathbb{R}$; altrimenti,
$\dfrac{\dot{x}(t)}{\cos^2(x(t))} = \sin^2 t \Rightarrow \tan(x(t)) - \tan(x_0) = [\tan x]_{x_0}^{x(t)} = \displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\cos^2 x} \overset{(x(s)=x)}{=} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\cos^2(x(s))} =$
$= \displaystyle\int_0^t \sin^2 s ds = \int_0^t \left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right) ds = \left[\frac{s}{2} - \frac{\sin(2s)}{4}\right]_0^t = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \Rightarrow \tan(x(t)) = \tan(x_0) +$
$+\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin(2t)}{4} \Rightarrow x(t) = \arctan\left(\tan(x_0) + \dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin(2t)}{4}\right) + k\pi$, ove $k \in \mathbb{Z}$

è tale che $x_0 \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$; in ogni caso, la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

(e) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2+1}{t^2+1} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{x^2(t)+1} = \dfrac{1}{t^2+1} \Rightarrow \arctan(x(t)) - \arctan(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2+1} \overset{(x(s)=x)}{=}$
$= \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)+1} ds = \int_0^t \frac{ds}{s^2+1} = \arctan t \Rightarrow \arctan(x(t)) = \arctan(x_0) + \arctan t \Rightarrow x(t) =$
$= \tan(\arctan(x_0) + \arctan t)$, che è definita $\iff -\frac{\pi}{2} < \arctan(x_0) + \arctan t < \frac{\pi}{2}$:
se $x_0 > 0$, la condizione $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x_0) + \arctan t$ è sempre verificata, mentre l'altra condizione lo è $\iff t < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_0)\right)$, e dunque l'intervallo massimale di definizione è $\left(-\infty, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_0)\right)\right)$;
se invece x_0, è sempre verificata $\arctan(x_0) + \arctan t < \frac{\pi}{2}$ mentre l'altra lo è $\iff t > \tan\left(-\arctan(x_0) - \frac{\pi}{2}\right)$ e dunque in questo caso l'intervallo di definizione è $\left(\tan\left(-\arctan(x_0) - \frac{\pi}{2}\right), +\infty\right)$; infine, se $x_0 = 0$ la soluzione è $x(t) = \tan(\arctan t) = t$ definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

(f) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x \log^2|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: $x_0 = 0$ e ± 1 sono punti di equilibrio e dunque in questi casi la soluzione è $x(t) \equiv x_0$; altrimenti,
$\dfrac{\dot{x}(t)}{x(t)\log^2|x(t)|} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)\log^2|x(s)|} ds \overset{(x=x(s))}{=} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x\log^2|x|} \overset{(y=\log|x|)}{=}$
$= \displaystyle\int_{\log|x_0|}^{\log|x(t)|} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{\log|x_0|}^{\log|x(t)|} = \frac{1}{\log|x_0|} - \frac{1}{\log|x(t)|} \Rightarrow \frac{1}{\log|x(t)|} = \frac{1}{\log|x_0|} - t =$
$= \dfrac{1 - t\log|x_0|}{\log|x_0|} \Rightarrow \log|x(t)| = \dfrac{\log|x_0|}{1 - t\log|x_0|} \Rightarrow |x(t)| = e^{\frac{\log|x_0|}{1-t\log|x_0|}} = |x_0|^{\frac{1}{1-t\log|x_0|}} =$
$= \begin{cases} x_0^{\frac{1}{1-t\log(x_0)}} & \text{se } x_0 > 0 \\ -(-x_0)^{\frac{1}{1-t\log(-x_0)}} & \text{se } x_0 < 0 \end{cases}$; la soluzione è definita fintanto che $1 - t\log|x_0| > 0$: se $|x_0| < 1$, questa condizione equivale a $t > \dfrac{1}{\log|x_0|}$, e dunque l'intervallo di definizione massimale è $\left(\dfrac{1}{\log|x_0|}, +\infty\right)$, mentre se $|x_0| > 1$ equivale a $t < \dfrac{1}{\log|x_0|}$ e cioè l'intervallo a $\left(-\infty, \dfrac{1}{\log|x_0|}\right)$.

2. (a) $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$. Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, le cui radici sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, dunque l'integrale generale, cioè l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale, sarà $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^t + Be^{3t}$; per trovare il valore di A e B occorre imporre i dati iniziali: $\begin{cases} \dot{x}(0) = A + 2B = 3 \\ x(0) = A + B = 2 \end{cases} \iff A = 1, B = 1$, quindi la soluzione del sistema è $x(t) = e^t + e^{2t}$.

(b) $\begin{cases} \dddot{x} + 8x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$. Il polinomio associato all'equazione differenziale è $P(\lambda) = \lambda^3 + 8$, che ha come radici complesse $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$; l'integrale generale quindi è $x(t) = Ae^{-2t} + Be^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + Ce^t \sin\left(\sqrt{3}t\right)$,

per trovare la soluzione del sistema impongo i dati iniziali: $\begin{cases} \ddot{x}(0) = 4A - 2B + 2\sqrt{3}C = 0 \\ \dot{x}(0) = -2A + B + \sqrt{3}C = 0 \\ x(0) = A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 1, B = 2, C = 0$ e dunque la soluzione del sistema è $x(t) = e^{-2t} + 2e^{-t} \cos\left(\sqrt{3}t\right)$.

(c) $\begin{cases} \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$. Il polinomio caratteristico associato è $P(\lambda)\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$, che ha per radici $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ con molteplicità 2, l'integrale generale quindi è $x(t) = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t$; imponendo i dati iniziali si ha $\begin{cases} \dddot{x}(0) = -D - 3A = 1 \\ \ddot{x}(0) = 2C - B = 0 \\ \dot{x}(0) = A + D = 3 \\ x(0) = B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 2, C = 1, D = 4,$

quindi la soluzione del sistema sarà $x(t) = (2 - t)\cos t + (t + 4)\sin t$.

(d) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 9t \\ \dot{x}(0) = -3 \\ x(0) = 5 \end{cases}$. Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale omogenea $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$ è: $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, che ha come soluzione doppia $\lambda = -3$, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è $x(t) = (A + Bt)e^{-3t}$; cerco ora una soluzione di $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 9t$ della forma $\bar{x}(t) = \alpha + \beta t$; si ha $\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \beta \\ \ddot{\bar{x}}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\bar{x}} + 6\dot{\bar{x}} + 9\bar{x} = 6\beta + 9\alpha +$

$+9\beta t = 9t \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha + 6\beta = 0 \\ 9\beta = 9 \end{cases} \iff \alpha = -\dfrac{2}{3}, \beta = 1$, quindi l'integrale generale di $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 9t$ è $x(t) = (A + Bt)e^{-3t} + t - \dfrac{2}{3}$; infine,

per trovare la soluzione del sistema impongo i dati iniziali: $\begin{cases} \dot{x}(0) = B - 3A + 1 = -3 \\ x(0) = A - \frac{2}{3} = 5 \end{cases} \iff A =$

$= \dfrac{17}{3}, B = 13 \Rightarrow x(t) = \left(13t + \dfrac{17}{3}\right) e^{-3t} + t - \dfrac{2}{3}$.

(e) $\begin{cases} \dddot{x} + \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = te^t \\ \ddot{x}(0) = 4 \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{2} \\ x(0) = 5 \end{cases}$. Cerco una soluzione dell'equazione differenziale omogenea $\dddot{x} + \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0$, il cui polinomio caratteristico associato è $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 2 = (\lambda + 1)\left(\lambda^2 - 2\right)$ che ha radici $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$ e dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è: $Ae^{-t} + Be^{\sqrt{2}t} + Ce^{-\sqrt{2}t}$; cerco ora una soluzione particolare di $\dddot{x} + \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = te^t$ della forma $\bar{x}(t) = (\alpha t + \beta)e^t$: essendo $\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \alpha e^t + (\alpha t + \beta)e^t = (\alpha t + \alpha + \beta)e^t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = \beta e^t + (\alpha t + \alpha + \beta)e^t = (\alpha t + 2\alpha + \beta)e^t \\ \dddot{\bar{x}}(t) = (\alpha t + 3\alpha + \beta)e^t \end{cases} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} + \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{x}} - 2\bar{x} = (\alpha t + 3\alpha + \beta)e^t +$

$+(\alpha t + 2\alpha + \beta)e^t - 2(\alpha t + \alpha + \beta)e^t - 2(\alpha t + 3\alpha + \beta) = (3\alpha - 2\beta - 2\alpha t)e^t$,

dunque $\begin{cases} -2\alpha = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{2}, \beta = -\dfrac{3}{4}$, dunque l'integrale generale dell'equazione non omogenea è $x(t) = Ae^{-t} + Be^{\sqrt{2}t} + Ce^{-\sqrt{2}t} - \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\right)e^t$;

infine, trovo la soluzione del problema imponendo i dati iniziali:

$\begin{cases} \ddot{x}(0) = A + 2B + 2C - \frac{7}{4} = 4 \\ \dot{x}(0) = -A + \sqrt{2}B - \sqrt{2}C - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \\ x(0) = A + B + C - \frac{3}{4} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A = \dfrac{23}{4}, B = \dfrac{15\sqrt{2}}{8}, C = -\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$,

quindi la soluzione del sistema è $\dfrac{23}{4}e^{-t} + \dfrac{15\sqrt{2}}{8}e^{\sqrt{2}t} - \dfrac{15\sqrt{2}}{8}e^{-\sqrt{2}t} - \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\right)e^t$.

(f) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = \sin t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda$, che ha per radici $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, dunque le soluzioni sono del tipo $A\cos t + B\sin t + C$; cerco ora una soluzione particolare di $\dddot{x} + \dot{x} = \sin t$ della forma $\bar{x}(t) = \alpha t\cos t + \beta t\sin t$;

essendo $\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\beta t + \alpha)\cos t + (\beta - \alpha t)\sin t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = (2\beta - \alpha t)\cos t - (\beta t + 2\alpha)\sin t \\ \dddot{\bar{x}}(t) = -(\beta t + 3\alpha)\cos t + (\alpha t - 3\beta)\sin t \end{cases} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} + \dot{\bar{x}} = -(\beta t + 3\alpha)\cos t + (\alpha t -$

$-3\beta)\sin t + (\beta t + \alpha)\cos t + (\beta - \alpha t)\sin t = -2\alpha\cos t - 2\beta\sin t = \sin t \iff \alpha = 0, \beta = -\dfrac{1}{2}$;

le soluzioni dell'equazione saranno quindi del tipo $x(t) = A\cos t + B\sin t + C - \dfrac{t\sin t}{2}$,

imponendo infine i dati iniziali si trova la soluzione: $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -A - 1 = 1 \\ \dot{x}(0) = B = 2 \\ x(0) = A + C = 3 \end{cases} \Rightarrow A = -2, B = 2$,

$C = 5 \Rightarrow x(t) = 2\sin t - 2\cos t + 5 - \dfrac{t\sin t}{2}$.

3. (a) $\{\ \dot{x} = (|x| - 1)\cos x$: si ha un punto di equilibrio per il sistema $\iff |x_0| - 1 = 0$ oppure $\cos x_0 = 0$: nel primo caso si ottengono i punti $x_0 = \pm 1$, nel secondo invece $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$; l'intervallo massimale di definizione delle soluzioni è sempre tutto $\mathbb{R}$ perché $|(|x| - 1)\cos x| \leq ||x| - 1| \leq |x| + 1$.

(b) $\{\ \dot{x} = (x^3 - x)\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$: i punti di equilibrio del sistema sono $x_0 = 0$ e $x_0 = \pm 1$, perché $0 < \dfrac{1}{x^2 + 1} \leq 1$, e dunque $\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right) \neq 0$; inoltre, come al punto precedente, le soluzione è definita globalmente perché $\left|(x^3 - x)\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)\right| \leq (|x|^3 + |x|)\left|\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)\right| \leq \dfrac{|x|^3 + |x|}{x^2 + 1} = |x|$.

(c) $\left\{\ \dot{x} = \begin{cases} (x^4 - 4x^2)\log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}\right.$: i punti di equilibrio del sistema sono dati da $x_0^4 - 4x_0^2 = 0$ e $\log|x_0| = 0$ e dunque sono $x_0 = 0$,

$x_0 = \pm 1$ e $x_0 = \pm 2$: per $|x_0| \leq 2$ le soluzioni sono definite per ogni tempo perché il dato iniziale si trova tra due punti di equilibrio; se invece $x_0 > 2$, l'intervallo di definizione è $\left(\int_2^{x_0} \frac{dx}{(x^4 - 4x^2) \log |x|}, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 - 4x^2) \log |x|} \right)$, che è illimitato a sinistra ma limitato a destra, cioè del tipo $(-\infty, a)$, perché $\frac{1}{(x^4 - 4x^2) \log |x|}$ è integrabile all'infinito; infine, se $x_0 < 2$ l'intervallo massimale è $\left(\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(x^4 - 4x^2) \log |x|}, \int_{x_0}^{-2} \frac{dx}{(x^4 - 4x^2) \log |x|} \right)$, che per lo stesso motivo è limitato a sinistra e illimitato a destra, cioè del tipo $(a, +\infty)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 11 (15 Dicembre 2010)
Equazioni differenziali

1. $\ddot{x} - 9x = \cos t$: l'integrale generale dell'equazione differenziale è della forma $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$ dove $x_0(t)$ risolve l'equazione differenziale omogenea $\ddot{x} - 9x = 0$ mentre $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare di $\ddot{x} - 9x = \cos t$; per trovare $x_0(t)$ considero il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - 9$, che ha come radici $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$, dunque le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono $x_0(t) = Ae^{3t} + Be^{-3t}$; cerco una soluzione particolare di $\ddot{x} - 9x = \cos t$ della forma $\bar{x}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$: si ha $\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = -\alpha \cos t - \beta \sin t \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ddot{\bar{x}} - 9\bar{x} = -\alpha \cos t - \beta \sin t - 9(\alpha \cos t + \beta \sin t) = -10\alpha \cos t - 10\beta \sin t = \cos t \iff \alpha = -\dfrac{1}{10}, \beta =$
$= 0 \Rightarrow \bar{x}(t) = -\dfrac{\cos t}{10}$, dunque l'integrale generale di $\ddot{x} - 9x = \cos t$ è $x(t) = Ae^{3t} + Be^{-3t} - \dfrac{\cos t}{10}$.

2. $\dddot{x} + x = te^{-t}$: l'integrale generale dell'equazione differenziale è della forma $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$ dove $x_0(t)$ risolve l'equazione differenziale omogenea $\dddot{x} + x = 0$ mentre $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare di $\dddot{x} + x = te^{-t}$; per trovare $x_0(t)$, considero il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^3 + 1$, che ha una radice reale $\lambda_1 = -1$ e due complesse $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \lambda_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$,
dunque le soluzioni dell'equazione omogenea saranno della forma $x_0(t) = Ae^{-t} + Be^{\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) +$
$+Ce^{\frac{t}{2}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; cerco ora una soluzione particolare di $\dddot{x} + x = te^{-t}$
della forma $\bar{x}(t) = \left(\alpha t^2 + \beta t\right) e^{-t}$: si ha $\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \left(-\alpha t^2 (2\alpha - \beta)t + \alpha + \beta\right) e^{-t} \\ \ddot{\bar{x}}(t) = \left(\alpha t^2 + (\beta - 4\alpha)t + 2\alpha - 2\beta\right) e^{-t} \\ \dddot{\bar{x}}(t) = \left(-\alpha t^2 + (6\alpha - \beta)t + 2\alpha + 3\beta\right) e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} + \bar{x} =$
$= \left(-\alpha t^2 + (6\alpha - \beta)t + 2\alpha + 3\beta\right) e^{-t} + \left(\alpha t^2 + \beta t\right) e^{-t} = (6\alpha t + 2\alpha + 3\beta)e^{-t} = te^{-t} \iff$
$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 6\alpha = 1 \end{cases} \iff \alpha = \dfrac{1}{6}, \beta = -\dfrac{1}{9}$, quindi l' integrale generale di $\dddot{x} + x = te^{-t}$
è $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t) = Ae^{-t} + Be^{\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\dfrac{t^2}{6} - \dfrac{t}{9}\right) e^{-t}$.

3. $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = \sin t$: l'integrale generale dell'equazione differeziale è della forma $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$ dove $x_0(t)$ è soluzione dell' equazione differenziale omogenea $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = 0$ mentre $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare di $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = \sin t$. Per $x_0(t)$, considero il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^4 + 13\lambda^2 + 36 = \left(\lambda^2 + 4\right)\left(\lambda^2 + 9\right)$, che ha radici complesse $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i, \lambda_3 = 3i, \lambda_4 = -3i$, pertanto l'equazione omogenea avrà per soluzione $x_0(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + C\cos(2t) + D\sin(2t)$; cerco una soluzione particolare di $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = \sin t$ della forma $\bar{x}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = -\alpha\sin t + \beta\cos t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = -\alpha\cos t - \beta\sin t \\ \dddot{\bar{x}}(t) = \alpha\sin t - \beta\cos t \\ \ddddot{\bar{x}}(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t \end{cases} \Rightarrow \ddddot{\bar{x}} + 13\ddot{\bar{x}} + 36\bar{x} = \alpha\cos t + \beta\sin t + 13(-\alpha\cos t - \beta\sin t) +$$

$+36(\alpha\cos t + \beta\sin t) = 24\alpha\cos t + 24\beta\sin t = \sin t \iff \alpha = 0, \beta = \frac{1}{24}$, dunque, l'integrale generale di $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = \sin t$ è $x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + C\cos(2t) + D\sin(2t) + \frac{\sin t}{24}$; imponendo infine il dato iniziale $x(0) = 0$ si ha $x(0) = A + C = 0 \iff A = -C \Rightarrow x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) - A\cos(2t) + D\sin(2t) + \frac{\sin t}{24}$.

4. $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = e^t$: l'integrale generale dell'equazione differeziale è della forma $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$ dove $x_0(t)$ risolve l' equazione differenziale omogenea $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + 1 = 0$ mentre $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare di $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = e^t$. Per $x_0(t)$, considero il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = (\lambda + 1)^3$, che ha radice $\lambda = -1$ di molteplicità 3, quindi $x_0(t) = \left(At^2 + Bt + C\right)e^{-t}$; cerco ora una soluzione particolare di $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = e^t$ della forma $\bar{x}(t) = \alpha e^t \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \alpha e^t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = \alpha e^t \\ \dddot{\bar{x}}(t) = \alpha e^t \end{cases} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} + 3\ddot{\bar{x}} +$ $+3\dot{\bar{x}} + \bar{x} = \alpha e^t + 3\alpha e^t + 3\alpha e^t + \alpha e^t = 8\alpha e^t = e^t \iff \alpha = \frac{1}{8}$, dunque l'integrale generale di $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = e^t$ è $x(t) = \left(At^2 + Bt + C\right)e^{-t} + \frac{e^t}{8}$; imponendo infine i dati iniziali $x(0) = 0 = \dot{x}(0)$ si ha $\begin{cases} x(0) = A + \frac{1}{8} = 0 \\ \dot{x}(0) = A + B + \frac{1}{8} = 0 \end{cases} \iff A = -\frac{1}{8}, B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x(t) = \left(Ct^2 + \frac{1}{8}\right)e^{-t} + \frac{e^t}{8}$.

5. $\dddot{x} + \ddot{x} - 2x = e^{-t}\sin t$: il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i)$, dunque l'omogenea associata ha come integrale generale $Ae^t + Be^{-t}\cos t + Ce^{-t}\sin t$; cerco ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, del tipo $\bar{x}(t) = \alpha te^{-t}\cos t + \beta te^{-t}\sin t$: essendo

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = ((\beta - \alpha)t + \alpha)e^{-t}\cos t + (\beta - (\alpha + \beta)t)e^{-t}\sin t \\ \ddot{\bar{x}}(t) = (2(\beta - \alpha) - 2\beta t)e^{-t}\cos t + (2\alpha t - 2(\alpha + \beta))e^{-t}\sin t \\ \dddot{\bar{x}}(t) = ((2\alpha + 2\beta)t - 6\beta)e^{-t}\cos t + ((2\beta - 2\alpha)t + 6\alpha)e^{-t}\sin t \end{cases} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} + \ddot{\bar{x}} - 2x = (4\alpha - 2\beta)e^{-t}\sin t -$$

$-4(\alpha + \beta)e^{-t}\cos t \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 1 \\ -2\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}, \beta = -\frac{1}{10} \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{te^{-t}\cos t}{5} - \frac{te^{-t}\sin t}{10}$, dunque le soluzioni dell'equazione sono $x(t) = Ae^t + Be^{-t}\cos t + Ce^{-t}\sin t + \frac{te^{-t}\cos t}{5} - \frac{te^{-t}\sin t}{10}$, e tra queste quelle che soddisfano la condizione $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$ sono tutte e sole quelle in cui $A = 0$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: i dati iniziali $x_0 = 0, \pm 1$ sono gli unici punti di equilibrio del sistema, dunque per questi dati iniziali la soluzione è $x(t) \equiv x_0\ \forall t \in \mathbb{R}$; altrimenti, $\frac{\dot{x}(t)}{x^3(t) - x(t)} = 1 \Rightarrow t = \int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^3(s) - x(s)} \overset{(x=x(s))}{=} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^3 - x} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x + 1} +$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x-1}-\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x}=\frac{\log|x(t)-1|}{2}-\frac{\log|x_0-1|}{2}+\frac{\log|x(t)+1|}{2}-\frac{\log|x_0+1|}{2}-\log|x(t)|+$$
$$+\log|x_0|=\frac{\log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|}{2}-\frac{\log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|}{2}\Rightarrow\log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|=\log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|+2t\Rightarrow\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|=$$
$$=\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|e^{2t}\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2(t)}=\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}=\frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t}\Rightarrow\frac{1}{x^2(t)}=1-\frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t}=\frac{x_0^2+\left(1-x_0^2\right)e^{2t}}{x_0^2}\Rightarrow$$
$\Rightarrow x(t)=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(1-x_0^2)\,e^{2t}}}$: questa soluzione è definita fintanto che la quantità sotto radice è positiva, ovvero $x_0^2>\left(x_0^2-1\right)e^{2t}$: se $x_0\in(-1,1)$ il termine a destra è sempre negativo e dunque la condizione è sempre verificata, cioè l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, altrimenti la condizione è vera $\iff e^{2t}<\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}\iff t<\log\sqrt{\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}}$, e dunque l'intervallo massimale è $\left(-\infty,\log\sqrt{\dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}}\right)$.

7. $\begin{cases}\dot{x}=\begin{cases}x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\\ x(0)=x_0\end{cases}$: i punti di equilibrio del sistema sono gli zeri della funzione $x^5\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, cioè $x_0=0$ e x_0 tale che $\dfrac{1}{x_0^2}=k\pi$ per $k\in\mathbb{Z}$, cioè $x_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$; per questi dati iniziali la soluzione è definita per tutti i tempi, e questo è vero anche per $-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}<x_0<\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, perché in questi casi il dato iniziale si trova tra due punti di equilibrio; se invece $x_0>\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, l'intervallo massimale di esistenza è $\left(\displaystyle\int_{x_0}^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\frac{dx}{x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)},\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)$, che è illimitato a sinistra ma limitato a destra, cioè del tipo $(-\infty,a)$, perché $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}\approx\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}<+\infty$; infine, se $x_0<-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, l'intervallo massimale di esistenza è $\left(\displaystyle\int_{x_0}^{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\frac{dx}{x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)},\int_{x_0}^{-\infty}\frac{dx}{x^5\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)$, che per lo stesso motivo è anch'esso illimitato a sinistra e limitato a destra.

8. $\begin{cases}\dot{x}=\begin{cases}\left(x^4-x^2\right)\log|\log|x|| & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0,\pm1\end{cases}\\ x(0)=x_0\end{cases}$: i punti di equilibrio sono ovviamente $0,\pm1$, e inoltre gli zeri della funzione $x\to\left(x^4-x^2\right)\log|\log|x||$, che sono i tre punti già menzionati e quelli in cui $\log|x|=\pm1$, ovvero $\pm e,\pm\dfrac{1}{e}$; per quanto riguarda l'unicità, va verificata solamente nei punti $0,\pm1$, dal momento che la funzione $\left(x^4-x^2\right)\log|\log|x||$ è di classe C^1 nel suo insieme di definizione: la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, e la sua derivata $\dfrac{x^4-x^2}{x|\log|x||}+\left(4x^3-x\right)\log|\log|x||$ è limitata (nulla) intorno

all'origine mentre diverge in ± 1, dunque la funzione è lipschitziana anche intorno a $x=0$ ma non in $x=\pm 1$; tuttavia, neanche questi due punti creano problemi per l'unicità, perché essendo $\log(1+t)\approx t$ per $t\approx 0$, allora $\displaystyle\int_1^{x(t)}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|\log|x||}\approx\int_1^{x(t)}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|x-1|}\approx\int_1^{x(t)}\frac{dx}{(x-1)\log|x-1|}=$ $=[\log|\log|x-1||]_1^{x(t)}=+\infty$, e dunque non è possibile trovare con il metodo di separazione di variabile una soluzione diversa da quella costante, e ragionando allo stesso modo c'è unicità anche intorno a -1; per quanto riguarda i tempi di esistenza, se $-e\le x_0\le e$ la soluzione è definita per tutti i tempi perché il dato iniziale si trova tra due punti di equilibrio; se invece $x_0>e$, l'intervallo massimale di esistenza è $\displaystyle\left(\int_e^{x_0}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|\log|x||},\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|\log|x||}\right)$, limitato a destra e illimitato a sinistra, e se infine $x_0<-e$, l'intervallo di esistenza è $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{x_0}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|\log|x||},\int_{x_0}^{-e}\frac{dx}{(x^4-x^2)\log|\log|x||}\right)$, illimitato a destra e limitato a destra.

9. $\begin{cases}\dot{x}=|x|^\alpha\\ x(0)=0\end{cases}$ ha un'unica soluzione per $\alpha\ge 1$, perché per questi valori la funzione $x\to|x|^\alpha$ è lipschitziana, e in questi casi la soluzione è $x(t)\equiv 0\forall t\in\mathbb{R}$; se invece $\alpha\in(0,1)$, oltre alla soluzione costante se ne possono trovare altre per separazione di variabili: $\displaystyle\frac{\dot{x}(t)}{|x(t)|^\alpha}=1\Rightarrow t=\int_0^t ds=\int_0^t\frac{\dot{x}(s)}{|x(s)|^\alpha}ds\overset{(x=x(s))}{=}\int_0^{x(t)}\frac{dx}{|x|^\alpha}=$ $\displaystyle=\left[segno(x)\frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{x(t)}=segno(x(t))\frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Rightarrow|x(t)|^{1-\alpha}=(1-\alpha)|t|\Rightarrow x(t)=\pm((1-\alpha)|t|)^{1-\alpha}$ sono altre due soluzioni; tuttavia, è possibile "combinare" la soluzione banale con quelle ottenute per separazione di variabili: $\forall t_0\in\mathbb{R}$ si ottengono altre due soluzioni: $\begin{cases}x(t)=\pm((1-\alpha)|t|)^{1-\alpha} & \text{se } t\ge t_0\\ 0 & \text{se } t\le t_0\end{cases}$, e dunque in tutto ci sono infinite soluzioni.

10. $\begin{cases}\dot{x}=-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\\ \dot{y}=-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\end{cases}$:

(a) Se $\nabla F(x(0),y(0))=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di equilibrio per il sistema e dunque $\nabla F(x(t),y(t))\equiv 0\forall t\in\mathbb{R}$, in particolare passando al $\lim_{t\to\infty}$; altrimenti, $\frac{d}{dt}F(x(t),y(t))=\langle\nabla F(x(t),y(t)),(\dot{x}(t),\dot{y}(t))\rangle=\langle\nabla F(x(t),y(t)),$ $-\nabla F(x(t),y(t))\rangle=-\|\nabla F(x(t),y(t))\|^2<0$, dunque $t\to F(x(t),y(t))$ è decrescente e inferiormente limitata e pertanto avrà un'asintoto orizzontale, pertanto $-\|\nabla F(x(t),y(t))\|^2=\frac{d}{dt}F(x(t),y(t))\overset{t\to+\infty}{\to}0$, ovvero $\|\nabla F(x(t),y(t))\|\overset{t\to+\infty}{\to}0$.

(b) $\begin{cases}\dot{x}=-2x-2y=-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\\ \dot{y}=-2x-2y-4y^3=-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+2y\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2x+2y+4y^3\end{cases}\Rightarrow F(x,0)=F(0,0)+$ $\displaystyle+\int_0^x\frac{\partial F}{\partial t}(t,0)dt=F(0,0)+\int_0^x 2tdt=F(0,0)+x^2\Rightarrow F(x,y)=F(x,0)+\int_0^y\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=$ $\displaystyle=F(0,0)+x^2+\int_0^y\left(2x+2t+4t^3\right)dt=F(0,0)+x^2+2xy+y^2+y^4$;
in particolare si può scegliere $F(0,0)=0$ e ottenere $F(x,y)=x^2+2xy+y^2+y^4$.

(c) Per quanto visto in precedenza, $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, ma in questo caso $\nabla F(x, y) = \big(2x + 2y, 2x + 2y + 4y^3\big)$ si annulla solo nell'origine, perché sottraendo la prima equazione alla seconda si ottiene $4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$ e inserendo nella prima si ottiene $2x = 0 \Rightarrow x = 0$, e inoltre $\|\nabla F(x, y)\|^2 = (2x + 2y)^2 + (2x + 2y + 4y^3\big)^2 \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} \infty$; di conseguenza, per la continuità di $(x, y) \to \nabla F(x, y)$, dev'essere $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0 = \|\nabla F(0, 0)\| \iff (x(t), y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} (0, 0)$, e dunque questo accade indipendentemente dalla scelta dei dati iniziali.