AM310 - Istituzioni di analisi superiore

Luca Battaglia

Esercizi su misure e integrali

Esercizio 1.
Sia X un insieme qualsiasi, $Y \subsetneq X$ un suo sottoinsieme proprio e sia, per $E \subset X$,

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & se\ E \cap Y \neq \emptyset \\ 0 & se\ E \cap Y = \emptyset \end{cases} .$$

1. *Dimostrare che μ è una misura esterna su X.*
2. *Dimostrare che*
$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : \, E_n \in \mathcal{E}, \, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\},$$
dove $\mathcal{E} = \{\emptyset, Y, Y^c, X\}$ e $\rho(\emptyset) = \rho(Y^c) = 0$, $\rho(Y) = \rho(X) = 1$.
3. *Dimostrare che gli insiemi μ-misurabili sono tutti e soli quelli della famiglia*
$$\mathcal{M} := \{A \subset X : \, Y \subset A \ oppure \ Y \subset A^c\}.$$

Esercizio 2.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misura e $f : X \to [0, +\infty]$.

1. *Dimostrare che se f è misurabile e limitata allora esiste una successione $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni semplici tali che $\psi_1 \geq \psi_2 \geq \cdots \geq f$ e $\psi_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente.*
2. *Dedurre dal punto precedente che se f è misurabile, limitata e nulla fuori da un insieme di misura finita allora*
$$\int f d\mu = \inf \left\{ \int \psi d\mu : \, \psi \ semplice, \, \psi \geq f \right\}.$$
3. *Dimostrare che se f è integrabile ma illimitata oppure se è integrabile con $\mu\{x \in X : \, f(x) \neq 0\} = +\infty$, allora l'uguaglianza precedente è falsa.*

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile rispetto alla misura di Lebesgue. Utilizzando opportunamente il Teorema della convergenza dominata ed eventualmente dei cambi di variabile, dimostrare che:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1 + n|x|} dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$
2. $\displaystyle\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right) \arctan\left(x^2\right) dx \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x + 2n\pi) \cos \frac{x}{n} dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$

Esercizio 4.

Sia $f(x,t) = \dfrac{\log\left(1+tx^2\right)}{1+x^2}$ *e* $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dx$.

1. *Dimostrare che se* $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ *allora* $|f(x,t)| \leq \dfrac{\log\left(1+(t_0+\delta)x^2\right)}{1+x^2}$ *e dedurne che* $F(t)$ *è continua per ogni* $t \geq 0$.
2. *Dimostrare che* $F(t)$ *è derivabile per ogni* $t > 0$ *e calcolare esplicitamente* $F'(t)$.
3. *Calcolare* $F(0)$ *e dedurne una formula esplicita per* $F(t)$.