AM310 - Istituzioni di analisi superiore

Luca Battaglia

Esercizi su differenziazione di misure e spazi L^p

Esercizio 1.
Sia $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ e siano $A_r f(x)$ e $Hf(x)$, rispettivamente, la media di f sull'intervallo $(x - r, x + r)$ e la funzione massimale di Hardy-Littlewood di f.

1. *Calcolare, al variare di $x \in \mathbb{R}, r > 0$, $A_f(x)$.*
2. *Calcolare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $Hf(x)$.*
3. *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale $\dfrac{1}{m((x-r,x+r))} \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} |f(x) - f(y)| dy \underset{r \to 0}{\to} 0$.*

Esercizio 2.
Siano $F \in AC([a,b])$ e $G : [c,d] \to [a,b]$ crescente e assolutamente continua.

1. *Dimostrare che $F \circ G \in AC([c,d])$.*
2. *Dimostrare che $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx = \int_c^d F'(G(y))G'(y)dy$.*
3. *Siano ora $F(x) := \sqrt{x}$ e $G(x) := x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}$; mostrare che $F, G \in AC([0,1])$ ma $F \circ G \notin AC([0,1])$ e dedurne che la monotonia di G è essenziale per il primo punto.*

Esercizio 3.
Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $a_n(k) = \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{\sqrt{n}}$.

1. *Calcolare $\|a_n\|_p$ per $p \in [1, \infty]$ e dedurne che $\{a_n\}$ è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$.*
2. *Calcolare il limite puntuale $\lim_{n \to \infty} a_n(k)$ per k fissato.*
3. *Dimostrare che $\{a_n\}$ converge in ℓ_p se e solo se $p > 2$ e calcolarne il limite.*

Esercizio 4.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misura finito e, per $\alpha \in [0,1]$, X_α definito da

$$X_\alpha := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ misurabili tali che } \exists C > 0 : \int_E |f| d\mu \leq C \mu(E)^\alpha : \forall E \in \mathcal{M} \right\}.$$

1. *Dimostrare che $L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \subset X_{1-\frac{1}{p}}$ per ogni $p \in [1, \infty]$.*
2. *Dimostrare, scegliendo opportunamente l'insieme E, che $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) = X_0$.*
3. *Dimostrare, scegliendo come E un opportuno sopralivello di f, che $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = X_1$.*