AM310 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2022-23)

Luca Battaglia

Esercizi su misure e integrali

Esercizio 1.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio misura,* $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{M}$ *una successione di insiemi misurabili e sia:*

$$\liminf_{n \to +\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

1. *Dimostrare che* $x \in \liminf_{n \to +\infty} A_n$ *se e solo se esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $x \in A_n$ *per ogni* $n \geq N$.
2. *Dimostrare che,* $\mu\left(\liminf_{n \to +\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.
3. *Utilizzando un opportuno controesempio, dimostrare che la disuguaglianza potrebbe essere stretta.*

Esercizio 2.
Sia $E \subset \mathbb{R}$ *e* μ *una misura di Lebesgue-Stieltjes su* $\mathbb{R}$.

1. *Supponiamo che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *esista un aperto* A_n *tale che* $\mu(E \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}$. *Dimostrare che l'insieme* B *definito da:*

   $$B := \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n, \qquad B_n := \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m,$$

   è tale che $\mu(E \setminus B) = 0$.
2. *Dimostrare che, se* $\mu(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{2^n}$*, allora* $\mu(B \setminus E) = 0$.
3. *Dedurre che se valgono le ipotesi dei due punti precedenti allora* E *è* μ*-misurabile.*

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *integrabile rispetto alla misura di Lebesgue. Utilizzando opportunamente il Teorema della convergenza dominata ed eventualmente dei cambi di variabile, dimostrare che:*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-n|x|} \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$
2. $\displaystyle\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right) \frac{x^2}{x^2+1} \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x+n) \cos \frac{2\pi x}{n} \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x.$

Esercizio 4.

Sia $f(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{x+x^3}$ *e* $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$.

1. *Dimostrare che se* $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ *allora* $|f(x,t)| \leq \dfrac{|t_0|+\delta}{1+x^2}$ *e dedurne che* $F(t)$ *è continua per ogni* $t \in \mathbb{R}$.
2. *Dimostrare che* $F(t)$ *è derivabile per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *e calcolare esplicitamente* $F'(t)$.
3. *Calcolare* $F(0)$ *e dedurne una formula esplicita per* $F(t)$.