AM310 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2022-23)

Luca Battaglia

Esercizi su misure prodotto e misure di Radon

Esercizio 1.
Sia, per $x, y > 0$, $f(x,y) := \begin{cases} (1+x-y)e^{x-y} & \text{se } x < y \\ 0 & \text{se } x \geq y \end{cases}$.

1. *Calcolare, per* x *fissato,* $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ *e, per* y *fissato,* $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$.
2. *Calcolare* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ *e* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ *e mostrare che sono due valori finiti ma differenti.*
3. *Dimostrare che*
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = +\infty$$
e confrontare con quanto visto a lezione.

Esercizio 2.
Sia, per $N \in \mathbb{N}$,

$$J_N := \int_{(1,+\infty)^N} \frac{1}{(x_1+\cdots+x_N)^{N+1}}\mathrm{d}x, \qquad \text{dove } (1,+\infty)^N = \{(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x_n > 1, \forall i = 1,\ldots,N\}$$
.

1. *Utilizzando il Teorema di Tonelli, dimostrare che* $J_N = \frac{1}{N}\int_{(1,+\infty))^{N-1}} \frac{1}{(x_1+\cdots+x_{N-1}+1)^N}\mathrm{d}x$.
2. *Utilizzando un opportuno cambio di variabile, dimostrare che* $J_N = \frac{N-1}{N^2}J_{N-1}$.
3. *Dedurre dal punto precedente che* $J_N = \frac{1}{N!N}$.

Esercizio 3.
Sia ν *una misura con segno su una* σ*-algebra* $\mathcal{M}$ *e*

$$\|\nu\|_* := \sup\{|\nu(E)| : E \in \mathcal{M}\}.$$

1. *Dimostrare che* $\|\cdot\|_*$ *è una norma sullo spazio delle misure con segno su* $\mathcal{M}$.
2. *Dimostrare che* $\frac{|\nu|(X)}{2} \leq \|\nu\|_* \leq |\nu|(X)$ *e dedurne che* $\|\cdot\|_*$ *e* $|\nu(X)|$ *sono due norme equivalenti.*
3. *Utilizzando opportuni controesempi, dimostrare che può valere l'uguaglianza* $|\nu|(X) = 2\|\nu\|_*$ *oppure* $\|\nu\|_* = |\nu|(X)$.

Esercizio 4.
Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in C([-1,1])^*$ *definito da:*

$$L_n f = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x - (n-1) \int_{-\frac{1}{n}}^0 f(x) \mathrm{d}x.$$

1. *Utilizzando il Teorema di Riesz, calcolare esplicitamente la norma* $\|L_n\|_{C([-1,1])^*} = \sup_{-1 \leq f \leq 1} |L_n f|$.

2. *Dimostrare che non esiste nessuna* $f \in C([-1,1])$ *tale che* $-1 \leq f \leq 1$ *e* $L_n f = \|L_n\|_{C([-1,1])^*}$.

3. *Trovare una misura con segno di Radon* μ *tale che* $L_n f \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{-1}^1 f \mathrm{d}\mu$.