AM310 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2022-23)

Luca Battaglia

Esercizi su differenziazione di misure e spazi L^p

Esercizio 1.
Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio misura finito,* $f : X \to [0, +\infty)$ *misurabile con* $\int f \mathrm{d}\mu = +\infty$ *e* $\nu(E) := \int_E f \mathrm{d}\mu$ *per ogni* $E \in \mathcal{M}$.

1. *Dimostrare che* $\nu \ll \mu$.
2. *Posto* $E_{n,m} := \{x \in X : n \leq f(x) < m\}$ *per* $n > m$, *dimostrare che* $\nu(E_{n,m}) \underset{m\to+\infty}{\to} +\infty$ *per ogni* n *fissato.*
3. *Utilizzando il punto precedente, dimostrare che esiste una successione* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di insiemi disgiunti tali che* $\mu(F_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *e* $\nu(F_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Esercizio 2.
Sia $E \subset \mathbb{R}$ *un insieme di misura di Lebesgue nulla e* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una famiglia decrescente di aperti* $A_n \supset E$ *di misura* $m(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

1. *Dimostrare che* $f(x) := \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \mathrm{d}x$ *è assolutamente continua.*
2. *Dimostrare che, se* $x \in E$ *e* $(x - |h|, x + |h|) \subset A_N$, *allora* $|f(x + h) - f(x)| \geq N|h|$.
3. *Dedurre che per ogni* $E \subset \mathbb{R}$ *di misura nulla esiste* $f \in AC$ *che non è derivabile in alcun punto di* E.

Esercizio 3.
Sia ϕ *una funzione semplice su* $\mathbb{R}^N$ *nulla fuori da un insieme di misura finita e* $p \in [1, \infty)$

1. *Dimostrare che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\psi \in X$ *tale che* $\|\psi - \phi\|_p \leq \varepsilon$, *dove*
$$X := \left\{ \sum_{m=1}^{M} a_m \chi_{A_m} : a_m \in \mathbb{Q},\, A_m \subset \mathbb{R}^N \text{ aperto di misura finita} \right\}.$$
2. *Dimostrare che per ogni* $\varepsilon > 0, \psi \in X$ *esiste* $\eta \in Y$ *tale che* $\|\eta - \psi\|_p \leq \varepsilon$, *dove*
$$Y := \left\{ \sum_{l=1}^{L} b_l \chi_{B_{r_l}(x_l)} : b_l, r_l \in \mathbb{Q},\, x_l \in \mathbb{Q}^N \right\}.$$
3. *Dimostrare che* Y *è denso in* $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, *e dunque in particolare* $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *è separabile, cioè ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

Esercizio 4.

Siano $f := \chi_{[-1,1]}$, $\varphi(x) := \dfrac{1}{\pi\,(1+x^2)}$ *e* $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$.

1. *Calcolare esplicitamente* $(f * \varphi_n)(x)$ *al variare di* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Utilizzando un teorema di passaggio al limite, dimostrare esplicitamente che* $f * \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ *in* $L^p((-1,1))$ *per ogni* $p \in [1,\infty)$.
3. *Stabilire se* $f * \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ *in* $L^\infty(\mathbb{R})$.