Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 1 (24 FEBBRAIO 2010)
RIPASSO

1. Dimostrare che la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è differenziabile nell'origine ma non è di classe C^1.

2. Siano $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ e $g\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tali che $f(x,g(x))=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dimostrare che se $g(0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,2)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=1$ allora g ha un massimo relativo in 0.

3. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

   (a) $|\sin x|\leq|x|$

   (b) $|1-\cos x|\leq\dfrac{x^2}{2}$

   (c) $|x-\sin x|\leq\dfrac{|x|^3}{6}$

   (d) $|\tan x|\leq 2|x|$ se $|x|\leq 1$

   (e) $|\arctan x|\leq|x|$

   (f) $|e^x-1|\leq 3|x|$ se $|x|\leq 1$

   (g) $|\sinh x|\leq 3|x|$ se $|x|\leq 1$

   (h) $|\log(1+x)|\leq 2|x|$ se $|x|\leq\dfrac{1}{2}$

4. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1, |x|+|y|\geq 1\right\}$

   (b) $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\leq x^2+y^2\leq 4, |y|\leq\sqrt{3}|x|\right\}$

   (c) $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x^2-y^2|\leq 1\right\}$

   (d) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq\dfrac{\sin y}{y}, y^2\leq\pi^2\right\}$

5. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 1, x^2+y^2+z^2\leq 2y\right\}$

   (b) $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right\}$

   (c) $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \max\{|x|,|y|,|z|\}\leq 1\right\}$

   (d) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 1, x^2+y^2\leq z^2\right\}$

   (e) $I=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2+z^2=1\right\}$

6. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{e^{2x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$

   (d) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-x-3}{x^4-9}\,dx$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 2 (3 Marzo 2010)
Spazi normati, contrazioni

1. Sia $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \in C([0,1])$. Calcolare $\|f_n\|_\infty$ e $\|f_n\|_1$ e dedurre che le due norme non sono equivalenti.

2. Sia $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}} \sin^2 x$. Mostrare che f_n converge in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

3. Sia $x_n(k) = \dfrac{n}{ne^k+1}$. Mostrare che x_n converge in ℓ^p $\forall p \geq 1$.

4. Sia $x_n(k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}$. Calcolare $\|x_n\|_1$ e stabilire se x_n converge in ℓ^1.

5. Sia $x_n(k) = \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$. Calcolare $\|x_n\|_1$, $\|x_n\|_2$ e studiare la convergenza di x_n in ℓ_1 e in ℓ_2.

6. Sia $x_n(k) = \dfrac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)}$.
   (a) Provare che $x_n \in \ell_2$ e $x_n \notin \ell_1$.
   (b) Mostrare che x_n converge in ℓ^2 ad una successione $x \in \ell_2$.
   (c) Provare che $x_n - x \in \ell_1$ e che $x_n - x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in ℓ_1.

7. Sia $x_n(k) = \dfrac{n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$. Mostrare che $x_n \in \ell^1$ e converge in ℓ^1.
   Suggerimento: se $x \geq 0$, $|\log(1+x) - x| \leq \dots$

8. Sia $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, 0, \dots\right)$.
   (a) Mostrare che $x_n \in \ell^1$.
   (b) Mostrare che x_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.
   (c) Mostrare che x_n rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ non converge ad alcun elemento di ℓ^1 e dedurne che $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ non è completo.

9. Mostrare che $\Phi : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definita da $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^3 f(t)} dt$ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

10. Sia $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x\}$ e $\Phi : X \to C([0,1])$ definita come $\Phi(u)(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^x u^2(t)dt$.
    (a) Mostrare che X è un sottoinsieme chiuso di $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
    (b) Mostrare che $\Phi(X) \subseteq X$ e che Φ è una contrazione.
    (c) Determinare tutti i punti fissi di Φ.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 3 (10 Marzo 2010)
Teorema della funzione implicita, spazi metrici

1. Per ognuna delle seguenti funzioni, stabilire se in un intorno del punto indicato è possibile scrivere l'insieme di livello $\{F = 0\}$ come grafico di una funzione $y = g(x)$. Fornire inoltre una stima dell'intorno di definizione della funzione g e, supponendo che sia di classe C^2, determinarne lo sviluppo di serie di Taylor al secondo ordine:
   (a) $F(x, y) = \arctan(x) + e^{-y} - \cos(xy)$ in $(0, 0)$.
   (b) $F(x, y) = e^{2y} - \sin(x + y) - 1$ in $(0, 0)$.
   (c) $F(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + \dfrac{e^x - 1 - x}{2}$ in $(0, 0)$.
   (d) $F(x_1, x_2, y) = y^3 - \cosh(x_1 x_2)$ in $(0, 0, 1)$.
   (e) $F(x_1, x_2, y) = \log(1 + x_1 x_2 y) - \arctan(x_1 x_2) + e^{(x_1^2 + x_2^2)y} - y$ in $(0, 0, 1)$.
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y_1, y_2) = \left(\dfrac{x + y_2}{1 + x + y_1^2}, \dfrac{x + y_1}{1 + x + y_2^2} \right)$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C(B_r(0), B_\rho((0, 0)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Supponendo che g sia di classe C^1, determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.
3. Studiare la convergenza in ℓ_p delle seguenti successioni:
   (a) $x_n(k) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k + 1}}$.
   (b) $x_n(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2^k + 1)^j}$.
4. Mostrare che l'equazione $\arctan\left(1 + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = x$ ha un'unica soluzione in $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Mostrare che la successione definita da $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}+1} \end{cases}$ converge a $\sqrt{2}$ per qualsiasi scelta di $a \geq 1$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 4 (17 Marzo 2010)

Teoremi della funzione implicita e della funzione inversa

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x_1, x_2, y) = e^{x_1 x_2 y} + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \dfrac{1}{1+y}$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(0))$ tale che $F(x_1, x_2, g(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g.

2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y_1, y_2) = \left(\log y_2 + e^{y_1} - \cos x, \arctan(y_1 y_2) - \dfrac{\sin x}{2 + y_1^2}\right)$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho((0,1)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.

3. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(y) = y^2 + y + \cosh y$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(1), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u$ $\forall u \in B_r(1)$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g.

4. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = \left(\sqrt{1+x^2} - e^{\arctan y}, x + x^3 + y^2\right)$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.

5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = \left(\arctan x + \dfrac{x^2}{2} - \ln\cos y, y + \dfrac{e^{xy}}{1+y^2} + \cosh\left(x^2 + y^2\right)\right)$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,2)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in B_r((0,2))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della prima componente della funzione g.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 5 (24 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati

1. Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = x - y$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y^2 = 1, 0 \leq x \leq 3\}$.

2. Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

3. Trovare i punti della parabola di equazione $y = x^2 - 1$ che distano meno dall'origine.

4. Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ e $f(x, y) = e^{xy}$. Calcolare $\max_E f$ e $\min_E f$.

5. Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y \geq 1, x \geq 0, y \leq 1\}$ e $f(x, y) = x + y^2$. Calcolare $\sup_E f$ e $\inf_E f$, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui sono raggiunti.

6. Siano $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z < 1\}$ e $f(x, y, z) = z^3 + xy$. Calcolare $\sup_E f$ e $\inf_E f$, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo e determinando eventualmente i punti in cui sono raggiunti.

7. Siano $a, b, c > 0$ e sia $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$. Determinare le coordinate del punto $p \in E$ per cui è minimo il volume del tetraedro definito intersecando il piano tangente in p ad E con i piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. Sia $F(x, y) = \left(\cos x \cos y + x \log\left(\frac{2}{\pi} y\right), e^{xy}\right)$.

   (a) Provare che F è invertibile in un intorno del punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Fornire una stima del raggio dell'intorno in cui F è invertibile e del raggio dell'intorno di definizione di F^{-1}.

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di F^{-1} nel punto $F\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 6 (31 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati, curve

1. Sia $\gamma(t) = \left(e^{-3t}\cos(4t), e^{-3t}\sin(4t)\right)$ $t \in [0, +\infty)$.
   Mostrare che γ è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.

2. Sia $\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$ $t \in [0, \pi]$.
   Mostrare che γ è regolare e calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1+3x^2}\,d\ell$.

3. Sia γ la curva ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ con il piano di equazione $y + z = 0$;
   (a) Provare che γ è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.
   (b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma xyz + \frac{|y|}{2x^2 + y^2 + 2z^2}\,d\ell$.

4. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = \dfrac{x^2}{2}$ $x \in [-1, 1]$.

5. Siano $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $f(x, y, z) = xy^2z^3$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

6. Siano $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $f(x, y, z) = \dfrac{y^2 + 1}{1 + x^2 + z^2}$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

7. Trovare, se esistono, i cilindri di volume massimo tra quelli inscritti in una sfera di raggio 1.

8. Siano $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\right\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

9. Sia $\|(x, y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$ per $p = 2, 4$.
   Calcolare $\max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x, y)\|_4$ e $\min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x, y)\|_4$ e determinare la costanti α, β ottimali per cui $\alpha\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_4 \leq \beta\|(x, y)\|_2$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 7 (7 Aprile 2010)
Ripasso

1. Sia $x_n(k) = \dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}$.
   (a) Calcolare $\|x_n\|_1$ e $\|x_n\|_2$.
   (b) Studiare la convergenza di x_n in ℓ_1 e ℓ_2 e calcolarne l'eventuale limite.
2. Sia $\Phi : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definita da $\Phi(x)(k) = e^{-k-1}x^2(k)$.
   (a) Provare che Φ non è una contrazione in ℓ_∞.
   (b) Provare che Φ è una contrazione sulla palla unitaria $X = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \le 1\}$.
3. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da
   $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - e^{-y_1} + \cos y_2, \log(\cosh x_1) - \dfrac{\sin(x_1x_2)}{1+y_1^2} + \arctan y_2\right)$.
   (a) Provare che $\exists\, r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(x_1, x_2, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.
4. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = \left(\sin(xy) + x\cos y, e^{x+y} - \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right)$.
   (a) Provare che $\exists\, r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.
5. Siano $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, z > 0\}$ e $f(x,y,z) = x^2y^2 + \log z$.
   (a) Dire se f è superiormente e/o inferiormente limitata su E.
   (b) Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta rispettivamente del massimo e del minimo ed eventualmente i punti in cui sono raggiunti.
6. Sia $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ per $t \in [0,\pi]$
   (a) Stabilire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolarne la lunghezza.
   (c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt[3]{|xy|}\,d\ell$.
7. Sia $x_n(k) = \dfrac{1+\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2}$. Discutere la convergenza di x_n in ℓ_2 e ℓ_1.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 8 (5 Maggio 2010)
Integrali

1. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_A xye^{x^6}\,dxdy$.
2. Sia $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{e} \le y \le e^{-|x|}\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_B \log y\,dxdy$.
3. Sia $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\pi}, x \le y \le \sqrt{\pi}\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_C x^2 \sin\left(y^2\right) dxdy$.
4. Sia $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \le \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b}\right\}$.
   Calcolarne l'area al variare di $a, b > 0$.
5. Sia $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \log 2 \le x \le \log 5, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x + y\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{z}{x^2(x + y)\sinh x}\,dxdydz$.
6. Sia $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_F xy\,dxdydz$.
7. Sia $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, x^5 y \le z \le x^5 y e^{x^2 - xy}\right\}$.
   Calcolarne il volume.
8. Sia $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \arctan(yz), 0 \le yz \le 1\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_H \frac{x \log y}{1 + y^2 z^2}\,dxdydz$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 9 (10/12 Maggio 2010)
Integrali con Fubini e con cambio di variabile

1. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_A |x| \cos(\pi y) dxdy$.

2. Sia B il tetraetro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.
   Calcolare $\displaystyle\int_B x^4 y^2 e^{xyz} dxdydz$.

3. Sia $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 2y \leq 2x \leq 2, 0 \leq x^2 z + y^2 z + z \leq 1\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_C \left(x^2 + y^2 + 1\right) \arctan x dxdydz$.

4. Sia $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\dfrac{\sin^3 x + \sin^4 x}{(\pi + 2y)^2} \leq z \leq \cos(y \sin x), 0 \leq y \sin x \leq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}\pi\right\}$.
   Calcolarne il volume.

5. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{y}{x} dxdy$.

6. Sia $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_B \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2 - z^2} dxdydz$.

7. Sia $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 - y^2 \leq xy \leq 1, x \geq 0\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_C \left(x^4 - y^4\right) e^{xy} dxdy$.

8. Sia $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1 \leq x^2 + y^2 + z^2\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_D x^2 y^2 z^2 dxdydz$.

9. Sia M una matrice 3×3 simmetrica definita positiva con autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.
   Calcolare il volume dell'insieme $E = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \langle Mv, v\rangle \leq 1\right\}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 10a (17 Maggio 2010)
Integrali impropri, superfici

1. Sia A il grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ con (x,y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1$.
   Calcolarne l'area.

2. Sia B la superficie parametrizzata da $\Phi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$, con $(u,v) \in [-\log 2, \log 2] \times [0, 2\pi]$.
   Calcolare $\displaystyle\int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma$

3. Sia $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$.
   Calcolare l'area di ∂C.

4. Sia $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \left(z^2 - 1\right)^2, x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 1\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_D |z| e^{z^2} dxdydz$.

5. Sia $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}\right\}$.
   Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_E \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 10b (24 Maggio 2010)
1-forme differenziali

1. Siano $\omega = x^2ydx + \left(e^{3y} + x^3\right)dy$ e $\gamma(t) = (t, \log t)$ per $t \in [1, e]$.
   Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$

2. Siano $\omega = z\sin(\pi y)dx + xe^z dy + xydz$ e γ l'unione della curva di equazioni $\left(t, t^2, t^3\right)$ per $t \in [0, 1]$ e del segmento tra $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 0)$.
   Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

3. Siano $\omega = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+2} + \sin y\right)dx + \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+2} + x\cos y\right)dx + \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2+2}dz$ e $\gamma(t) = \left(e^t\cos(\pi t), e^t\sin(\pi t), e^t\right)$ per $t \in [-1, 1]$.

   (a) Mostrare che ω è una forma chiusa.

   (b) Stabilire se ω è esatta e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale V tale che $V(0, 0, 0) = \log 2$.

   (c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

4. Sia Σ la superficie parametrizzata da $(u\cos v, u\sin v, v)$ con (u, v) tali che $0 \le v \le u \le 1$.
   Calcolare l'area di Σ e $\displaystyle\int_\Sigma z^2 d\sigma$.

5. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 1, z^2 \le 4x^2 + 9y^2\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_A \sqrt{4x^2+9y^2}\,dxdydz$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 11 (26 Maggio 2010)
Teoremi di Gauss-Green, divergenza e Stokes

1. Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per la forma differenziale $\omega = e^x dx + xy dy$ sull'insieme $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\right\}$.

2. Sia $\gamma(t) = \left(\cos t, \sin^3 t\right)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
Usando il teorema di Gauss-Green, calcolare l'area della regione di $\mathbb{R}^2$ racchiusa da γ.

3. Sia $\omega = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx - \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy$ e $\gamma_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
   (a) Mostare che ω è una forma chiusa.
   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_R} \omega$.
   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, mostrare che ω è esatta.

4. Siano $\omega = -\dfrac{3x^2y^3}{x^6 + y^6} dx + \dfrac{3x^3y^2}{x^6 + y^6} dy$, $\gamma_1(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sqrt[3]{\sin t}\right)$ per $t \in [0, 2\pi]$ e γ_2 la circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.
   (a) Mostrare che ω è una forma chiusa.
   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega$.
   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_2} \omega$.

5. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x, y) = \left(xy, y^2\right)$ sull'insieme $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\right\}$.

6. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\right)$ sulla porzione di palla unità contenuta nel semipiano $z \geq 0$.

7. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = xyz dx + x^3 dy - z dz$ sulla superficie di equazione $0 \leq z = 1 - x^2 - y^2$.

8. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = \left(z^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 - z^3\right) dy + \left(y^3 - x^3\right) dz$ sul triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 12 (28 Maggio 2010)
Ripasso

1. Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$.
   Calcolare $\displaystyle\int_A e^{x+y+z} dxdydz$.

2. Calcolare il volume di un cono con base ellittica di semiassi a e b e altezza h.

3. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva di equazioni $(\cos t + 2, 0, \sin t + 2)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
   Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \frac{d\sigma}{x^2 + y^2}$.

4. Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per la 1-forma differenziale $\dfrac{dx}{x^2 + 4y^2 + 4} + xydy$ sulla porzione dell'ellisse di equazioni $x^2 + 4y^2 \leq 4$ contenuta nel primo quadrante.

5. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ sull'insieme
   $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

6. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = \dfrac{yz}{x + y - 1}dx + \dfrac{xz}{x - y + 1}dy + \dfrac{xy}{x - y + 1}dz$ sull'intersezione tra la sfera unità e il piano di equazioni $x = y$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 1 (2 Marzo 2011)
Ripasso

1. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^2(x)dx$

   (c) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1-\sin(x)}$

   (d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin(x)}$

   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx$

   (g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-x}$

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+4e^{-x}-2}$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}\le 1\right\}$

   (b) $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le x\right\}$

   (c) $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, x^2\le \dfrac{y^2}{3}\right\}$

   (d) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1, |y|\le 4-x^2\right\}$

3. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 1\right\}$

   (b) $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\right\}$

   (c) $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2, |z|\le 1\right\}$

   (d) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z|\le 1\right\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 2 (9 MARZO 2011)
SPAZI NORMATI

1. Sia $f_n(x) = xe^{-nx} \in C([0,1])$.
   Calcolare $\|f_n\|_1$ e mostrare che $f_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ rispetto a questa norma.

2. Sia $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} \sin x \in C([0,\pi])$.
   Mostrare che f_n converge rispetto $\|\cdot\|_1$ e calcolarne il limite.

3. Sia $x_n(k) = \dfrac{n}{n\,(k^2+1)+1}$.
   Mostrare che x_n converge in ℓ_1 e calcolarne il limite.

4. Sia $x_n(k) = \dfrac{1}{n^3}\cos^k\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Calcolare $\|x_n\|_1$, $\|x_n\|_2$ e stabilire se x_n converge in ℓ_1 e/o in ℓ_2.

5. Sia $[a,b]$ un intervallo limitato:

   (a) Mostrare che esiste $C > 0$ tale che
   $$\|f\|_1 \le C\|f\|_\infty \quad \forall f \in C([a,b])$$

   (b) Mostrare, utilizzando la successione
   $$f_n(x) = (1-nx)\mathbf{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x) \in C([0,1])$$
   che le due norme non sono tuttavia equivalenti.

   (c) Mostrare, utilizzando la successione
   $$g_n(x) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathbf{1}_{[0,n]}(x) \in C([0,+\infty))$$
   che se l'intervallo è illimitato la disuguaglianza precedente non è vera per alcun $C > 0$.

6. Trovare le costanti ottimali A e B tali che
   $$A\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le B\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
   (Per costanti ottimali si intende tali che la disuguaglianza precedente non è più valida per $A' > A$ oppure $B' < B$)

7. Sia $C^k([-1,1])$ lo spazio delle funzioni derivabili k volte con derivata k-esima continua.

   (a) Mostrare che
   $$\|u\|_{C^m([-1,1])} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \cdots + \left\|u^{(m)}\right\|_\infty$$
   è una norma su $C^k([-1,1])$ $\forall m \le k$.

(b) Mostrare, procedendo per induzione, che $C^k([-1,1])$ è completo rispetto a $\|\cdot\|_{C^k([-1,1])}$

(c) Mostrare, utilizzando la successione

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

che $C^k([-1,1])$ non è completo rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.

(d) Mostrare, costruendo un'opportuna successione, che $C^k([-1,1])$ non è completo rispetto a $\|\cdot\|_{C^m([-1,1])}$ se $m < k$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 3 (16 Marzo 2011)
Teorema delle contrazioni

1. Sia $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ definita come:
$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 f(t) \arctan\left(x^2 t^2\right) dt$$
Mostrare che Φ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e determinare tutti i suoi punti fissi.

2. Sia $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 2 \ \forall x \in [0,1]\}$ e $\Phi : X \to C([0,1])$ definita come:
$$(\Phi f)(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt$$
   (a) Mostrare che X è un sottoinsieme chiuso di $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
   (b) Mostrare che $\Phi(X) \subset X$ e che Φ è una contrazione.
   (c) Trovare tutti i punti fissi di Φ.

3. Sia $B = \{x \in \ell_1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa di ℓ_1 e $\Phi : \ell_1 \to \ell_1$ definita come:
$$(\Phi x)(k) = e^{-\frac{k+2}{k+1}} x^2(k)$$
   (a) Mostrare che Φ è una contrazione su B.
   (b) Mostrare che Φ non è una contrazione su ℓ_1.

4. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni a valori reali e $\Phi_a : \ell_\infty \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definita come:
$$(\Phi_a x)(0) = 0 \quad \text{e} \quad (\Phi_a x)(k) = \sum_{j=1}^{k} a^j x(j) \text{ se } k \geq 1$$
al variare del parametro $a \geq 0$.
   (a) Mostrare che $\Phi_a(\ell_\infty) \subset \ell_\infty \iff a < 1$
   (b) Mostrare che Φ_a è una contrazione su $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) \iff a < \frac{1}{2}$.

5. Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = \frac{3}{x_{n-1}+2} \end{cases}$$
al variare di $c \geq 0$.

6. Mostrare che l'equazione $x = \log\left(x^2 + 3\right)$ ha un'unica soluzione positiva.

7. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(a) $|\sin x| \leq |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $|1 - \cos x| \leq \dfrac{x^2}{2} \; \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$.

(d) $|\arctan x| \leq |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(f) $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(g) $|\cosh(x) - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(h) $|\log(x+1)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 4 (23 Marzo 2011)
Teorema della funzione implicita

1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$F(x, y) = \sin(xy) - \cos(x) + e^y$$

   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tali che $F(x, g(x)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r(0)$

   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g.

2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$F(x_1, x_2, y) = \arctan(x_1 x_2 y) + \log\left(\frac{\cos(x_1 + x_2)}{y}\right)$$

   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r((0, 0)), B_\rho(1))$ tali che $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r((0, 0))$

   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g.

3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x, y_1, y_2) = \left(\sin(y_1) + xe^{y_1} - 1, y_1^2 + \sinh(xy_2) + \log x\right)$$

   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(1), B_\rho((0, 0)))$ tali che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r(1)$

   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g.

4. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\sqrt{y_1 + 1} - e^{\sin(x_1 + x_2)}, \frac{y_2}{x_1^2 + 1} - \sin(x_2)\cos(y_2)\right)$$

   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r((0, 0)), B_\rho((0, 0)))$ tali che $F(x_1, x_2, g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r((0, 0))$

   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 5 (30 MARZO 2011)

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come
$$F(x) = e^x \cos(x) - \sqrt{x^2 + 1}$$
   (a) Provare che $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u \ \forall u \in B_r(0)$
   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$F(x, y) = \left(\cosh(x) - \frac{1}{y+1}, x + \log(\cos y)\right)$$
   (a) Provare che $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v) \ \forall u \in B_r((0,0))$
   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g

3. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = xy$.
Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

4. Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ e $f(x,y,z) = xyz^2$.
Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

5. Determinare i punti della parabola di equazione $y = 2 - x^2$ che distano meno dall'origine.

6. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2\}$ e $f(x,y) = (x-5)^2 + 2y^2$.
Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

7. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 1\}$ e $f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(yt) dt$:
   (a) Mostrare che f è ben definita su A.
   (b) Determinare un'espressione esplicita per f.
   (c) Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

8. Sia $y \in \mathbb{R}^n$ un vettore fissato. Calcolare
$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y \rangle \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y \rangle$$
e dedurne la validitá della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
$$\langle x, y \rangle \le \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 6 (6 APRILE 2011)
MASSIMI E MINIMI VINCOLATI, RIPASSO

1. Siano $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\right\}$ e $f(x, y) = x(y + 1)$.
Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ specificando se si tratta di massimo e/o di minimo ed eventualmente i punti dove vengono raggiunti.

2. Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{z^2 + 1}$.
Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ specificando se si tratta di massimo e/o di minimo ed eventualmente i punti dove vengono raggiunti.

3. Determinare i cilindri di volume massimo tra quelli aventi superficie totale pari a 2π.

4. Calcolare, per $a, b > 0$, l'area dell'insieme $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -b \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a\left(b^2 - x^2\right)\right\}$ e determinarne il valore massimo per i valori di a, b tali che $a^2 + b^2 = 1$.

5. Calcolare l'area dell'insieme $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x + 1, \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\}$.

6. Sia $x_n = \dfrac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) + 1}{k^2}$.
Stabilire se x_n converge in ℓ_2 e/o in ℓ_1.

7. Sia $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ definita come
$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 \sin(x \sin(\pi t) f(t)) dt$$
Provare che Φ è una contrazione su $C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

8. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$F(x, y_1, y_2) = \left(\left(y_2^2 + 1\right) e^{\arctan x} - y_1, \frac{y_2}{y_1} + \sin\left(x^2\right)\right)$$
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho((1, 0)))$ tali che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0 \; \forall x \in B_r(0)$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 7 (27 Aprile 2011)

Integrali

1. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x\right\}$. Calcolare
$$\int_A xydxdy$$

2. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\right\}$. Calcolare
$$\int_A e^{-y^2}dxdy$$

3. Sia A il tetraedro avente come vertici i punti $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Calcolare
$$\int_A \sin(\pi xyz)y^2z^4dxdydz$$

4. Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, y \le z \le ye^{x^3-y^3}\right\}$. Calcolare
$$\int_A x^2ye^{y^3}dxdydz$$

5. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 2\right\}$. Calcolare
$$\int_A y^3dxdy$$

6. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \ge \frac{1}{4}, x \ge 0\right\}$. Calcolare
$$\int_A xdxdy$$

7. Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z^2 \le x^2 + y^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$. Calcolare
$$\int_A \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 1}$$

8. Sia $A_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 0\ \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i \le 1\right\}$.
Mostrare, procedendo per induzione, che A_n ha misura pari a $\frac{1}{n!}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 8 (4 Maggio 2011)

Integrali, curve

1. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}$. Calcolare

$$\int_A x^3 dxdy$$

2. Sia $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \sin^2 z, z \in [0,\pi]\right\}$.
Calcolarne il volume.

3. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 1 - x^3, x \geq 0\right\}$. Calcolare

$$\int_A \left(x^2y^2 - x^8\right) e^{x^6+2x^3y+y^2} dxdy$$

4. Sia $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_A \frac{dxdydz}{z^2\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}$$

5. Sia $\gamma(t) = (t + \sin t, \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
Stabilire se è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.

6. Sia $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   (a) Stabilire se γ è una curva regolare.

   (b) Calcolarne la lunghezza

   (c) Calcolare

$$\int_\gamma e^{y^{\frac{2}{3}}} d\ell$$

7. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}|x|\right\}$. Calcolare

$$\int_A \frac{dxdy}{y} \qquad \int_{\partial A} \frac{d\ell}{y}$$

8. Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva, B_n la misura della palla n-dimensionale e

$$A_M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Mx, x\rangle \leq 1\}$$

Mostrare, con un opportuno cambio di variabile, che

$$|A_M| = \frac{B_n}{\sqrt{\det M}}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 9 (11 MAGGIO 2011)
INTEGRALI, CURVE

1. Sia $\gamma(t) = \left(2t, 3t^2, 3t^3\right)$ per $t \in [0,1]$.
   (a) Calcolarne la lunghezza
   (b) Calcolare
   $$\int_\gamma \frac{\sqrt[3]{z}\log\left(\frac{x}{2}+1\right)}{3y+2}d\ell$$
2. Sia γ l'intersezione tra il cilindro di equazioni $5x^2+y^2=1$ e il piano $z=2x$.
   (a) Calcolarne la lunghezza
   (b) Calcolare
   $$\int_\gamma \frac{|y|}{y^2+5z^2}d\ell$$
3. Sia $\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\right)$ per $t \in [0,+\infty)$.
   (a) Calcolarne la lunghezza
   (b) Calcolare
   $$\int_\gamma x^2 d\ell$$
4. Sia $\gamma(t) = (\cos t, 3\sin t)$ per $t \in [-\pi,\pi]$.
   (a) Calcolare
   $$\int_\gamma \sqrt{8x^2+1}d\ell$$
   (b) Calcolare l'equazione della retta tangente a γ nel punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
5. Sia γ il triangolo avente per vertici i punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$. Calcolare
   $$\int_\gamma xe^y d\ell$$
6. Sia $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2, 1 \le z \le 2\right\}$. Calcolare
   $$\int_A y\left(y^2+y+1\right)dxdydz$$
7. Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 1, x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\right\}$. Calcolare
   $$\int_A \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 10 (18 MAGGIO 2011)

SUPERFICI

1. Sia Σ la superficie parametrizzata da $\Phi(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,u)$ per $(u,v)\in[0,\log 2]\times[-\pi,\pi]$.
   Calcolare l'area di Σ.

2. Sia Σ la superficie parametrizzata da $\Phi(u,v)=(u,v,e^u)$ per $(u,v)\in[0,1]\times[0,3]$.
   Calcolare
   $$\int_\Sigma z^2 d\sigma$$

3. Sia Σ la superficie parametrizzata da $\Phi(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$ per $(u,v)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$.
   Calcolare
   $$\int_\Sigma \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+1}}d\sigma$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva avente nel piano yz le equazioni $(y(t),z(t))=(\cos t+2,\sin t)$ per $t\in[-\pi,\pi]$.
   Calcolare l'area di Σ e
   $$\int_\Sigma x^2+y^2+z^2 d\sigma$$

5. Sia $\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\right\}$.
   Calcolare l'area di Σ e
   $$\int_\Sigma \sqrt{16-3z^2}d\sigma$$

6. Sia $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2\le 3z^2, z\ge 0\}$.
   Calcolare l'area di ∂A.

7. Sia $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1, 0\le x, 0\le y, z=x^2-y^2\}$.
   Calcolarne l'area.

8. Sia $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x^2+z^2=1, |y|\le z\}$. Calcolare
   $$\int_\Sigma |x| d\sigma$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 11 (25 Maggio 2011)
1-forme differenziali

1. Sia $\gamma(t) = \left(\sin t, \cos^2 t, \cos t\right)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\omega = xydx + (x+y)dy - zdz$.
   Calcolare $\int_\gamma \omega$.

2. Sia $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ la semiellisse centrata nell'origine di semiassi 2 e 3 contenuta nel semipiano superiore, percorsa in senso antiorario, e sia $\omega = dx + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) dy$.
   Calcolare $\int_\gamma \omega$.

3. Sia $\gamma(t) = \left(e^{\sin(\pi t)}, e^{-\cos(\pi t)}, e^{2t-1}\right)$ per $t \in [0,1]$ e
   $\omega = \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2+1}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2+1}dz.$
   (a) Mostrare che ω è una forma chiusa.
   (b) Stabilire se ω è una forma esatta e, in caso affermativo, trovare un potenziale $f(x,y,z)$ tale che $f(0,0,0) = 0$.
   (c) Calcolare $\int_\gamma \omega$.

4. Sia $\gamma(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sin t\right)$ per $t \in [-\pi, \pi]$ e $\omega = -\frac{3x^2y}{x^6+y^2}dx + \frac{x^3}{x^6+y^2}dy$.
   (a) Mostrare che ω è una forma chiusa.
   (b) Calcolare $\int_\gamma \omega$.
   (c) Stabilire se ω è una forma esatta.

5. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [-\pi, \pi]$ e $\omega = \cos(x)e^{\arctan y}dx + \left(\frac{\sin(x)e^{\arctan y}}{y^2+1} + x\right) dy$.
   Calcolare $\int_\gamma \omega$

6. Sia $\gamma(t) = \left(t, \log((e-1)t+1), \frac{4}{\pi}\arctan t\right)$ per $t \in [0,1]$ e
   $\omega = \left(4xz - 3y^2\right) dx + \left(z^2 - 6xy\right) dy + \left(2yz + 2x^2\right) dz.$
   Calcolare $\int_\gamma \omega$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 12 (27 MAGGIO 2011)

TEOREMI DI GAUSS-GREEN, DIVERGENZA, STOKES

1. Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per la forma $\omega = \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$ sul dominio $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2, x \geq 0\right\}$.

2. Utilizzando il teorema di Gauss-Green, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla curva $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin t\right)$ per $t \in [-\pi, \pi]$.

3. Sia $\omega = \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx + \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$ e $\gamma_R = (R\cos t, R\sin t)$ per $t \in [-\pi, \pi]$.

   (a) Mostrare che ω è chiusa.

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_R} \omega$.

   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, mostrare che ω è esatta.

4. Sia $\omega = -\dfrac{y^3}{4x^2+y^6}dx + \dfrac{3xy^2}{4x^2+y^6}dy$, $\gamma_1(t) = \left(\dfrac{\cos t}{2}, \sqrt[3]{\sin t}\right)$ per $t \in [-\pi, \pi]$ e γ_2 la circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.

   (a) Mostrare che ω è chiusa.

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega$.

   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_2} \omega$.

5. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x,y) = (\sin(\pi x), e^y)$ sul triangolo avente per vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

6. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ sull'insieme $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

7. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = \dfrac{z}{x+y+z+1}dx + \dfrac{x}{x+y+z+1}dy + \dfrac{y}{x+y+z+1}dz$ sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

8. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = xy^2dy + xz^2dz$ sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 contenuta nel piano xy.