AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2024-25)

Luca Battaglia

Esercizi su misure e integrali

Esercizio 1.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio misura.*

1. *Dimostrare che, data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *misurabile, una funzione* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è misurabile se è solo se lo è* $g - f$.
2. *Dimostrare che, se* μ *non è completa, allora per ogni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *misurabile esiste una* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non misurabile che coincida q.o. con* f.
3. *Dimostrare che, se* μ *è completa, allora ogni funzione che coincide* μ*-q.o. con una funzione misurabile è anch'essa* μ*-misurabile.*

Esercizio 2.
Sia X *un insieme qualsiasi,* $Y \subsetneq X$ *un suo sottoinsieme proprio e*

$$\mathcal{M} := \{E \subset X : E \supset Y \text{ oppure } E \cap Y = \emptyset\}.$$

1. *Dimostrare che* $\mathcal{M}$ *è una* σ*-algebra su* X.
2. *Dimostrare che*
$$\mu(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } E \supset Y \\ 0 & \text{se } E \cap Y = \emptyset \end{cases}$$
è una misura su $\mathcal{M}$.
3. *Dimostrare che* $f : X \to \mathbb{R}$ *è* μ*-misurabile se e solo se è costante su* Y.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *integrabile rispetto alla misura di Lebesgue. Utilizzando opportunamente il Teorema della convergenza dominata ed eventualmente dei cambi di variabile, dimostrare che:*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$
2. $\displaystyle\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right)\frac{|x|}{|x|+2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x+2n)\cos\frac{\pi x}{n}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x.$

Esercizio 4.
Sia $f(x,t) = \dfrac{\arctan(tx) - \arctan x}{x}$ *e* $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x.$

1. *Utilizzando la formula* $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, *dimostrare che se* $0 < t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ *allora* $|f(x,t)| \leq \begin{cases} t_0 + \delta + 1 & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1 + \frac{1}{t_0 - \delta}}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ *e dedurne che* $F(t)$ *è continua per ogni* $t > 0$.

2. *Dimostrare che* $F(t)$ *è derivabile per ogni* $t > 0$ *e calcolare esplicitamente* $F'(t)$.

3. *Calcolare* $F(1)$ *e dedurne una formula esplicita per* $F(t)$.