AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2024-25)

Luca Battaglia

Esercizi su misure prodotto e misure di Radon

Esercizio 1.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *fissati e* $f_n = n^a \chi_{[n^b, 2n^b]}$.

1. *Dire per quali* a, b *si ha* $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *m-q.o..*
2. *Dire per quali* a, b *si ha* $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *in media.*
3. *Dire per quali* a, b *si ha* $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *in misura.*

Esercizio 2.
Sia, per $x, y > 0$, $f(x,y) := \begin{cases} (1+y-x)e^{y-x} & \text{se } y \le x \\ 0 & \text{se } y > x \end{cases}$.

1. *Calcolare, per* x *fissato,* $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ *e, per* y *fissato,* $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$
2. *Calcolare* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ *e* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ *e mostrare che sono due valori finiti ma differenti.*
3. *Dimostrare che*
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = +\infty$$
e confrontare con quanto visto a lezione.

Esercizio 3.
Siano μ, ν *misure finite sui boreliani di* $\mathbb{R}$ *e sia* $L : C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *il funzionale lineare continuo positivo dato da*
$$L : f \mapsto \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y\}} f(x)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y).$$

1. *Trovare, utilizzando il Teorema di Fubini, una misura finita* λ *tale che* $Lf = \int f\mathrm{d}\lambda$.
2. *Calcolare, utilizzando il Teorema di Riesz, il valore* $\sup\limits_{0\le f\le 1} Lf$ *e trovare una successione* $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ *che massimizzi questo estremo superiore.*
3. *Dimostrare che, se i punti hanno misura nulla per* μ, ν *e* $\mu(-E) = \mu(E)$ *e* $\nu(-E) = \nu(E)$ *per ogni boreliano* E, *allora* $\lambda(\mathbb{R}) = \dfrac{\mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})}{2}$.

Esercizio 4.
Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in C([-1,1])^*$ definito da:

$$L_n f = \frac{n^2}{n+2} \int_0^{\frac{1}{n}} (1-x) f(x) \mathrm{d}x - \frac{n}{n+2} \int_{-1}^{0} f(x) \mathrm{d}x.$$

1. *Utilizzando il Teorema di Riesz, calcolare esplicitamente la norma* $\|L_n\|_{C([-1,1])^*} = \sup_{-1 \leq f \leq 1} |L_n f|$.

2. *Dimostrare che non esiste nessuna* $f \in C([-1,1])$ *tale che* $-1 \leq f \leq 1$ *e* $L_n f = \|L_n\|_{C([-1,1])^*}$.

3. *Trovare una misura con segno di Radon* μ *tale che* $L_n f \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{-1}^{1} f \mathrm{d}\mu$.