AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2024-25)

Luca Battaglia

Esercizi su differenziazione di misure e spazi L^p

Esercizio 1.
Sia F la funzione di Cantor, estesa all'intera retta reale come $F(x) = 1$ se $x > 1$ e $F(x) = 0$ se $x < 0$, $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ i sotto-intervalli di $[0,1]$ con estremi razionali e $G(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} F\left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right)$.

1. *Dimostrare che $G(x)$ è ben definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Dimostrare che G è strettamente crescente in ogni sottointervallo di $[0,1]$.*
3. *Dimostrare che G è derivabile q.o. e calcolare G'.*

Esercizio 2.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misura e f misurabile tale che $f \in \bigcap_{p\geq p_0} L^p$ per qualche $p_0 \geq 1$.

1. *Utilizzando una disuguaglianza di interpolazione, dimostrare che $\liminf_{p\to\infty} \frac{\int |f|^{p+1}}{\int |f|^p} \geq \|f\|_\infty$.*
2. *Dimostrare che $\limsup_{p\to\infty} \frac{\int |f|^{p+1}}{\int |f|^p} \leq \|f\|_\infty$ e dedurne che $\frac{\int |f|^{p+1}}{\int |f|^p} \underset{p\to\infty}{\to} \|f\|_\infty$.*
3. *Fissato $t > 0$, calcolare $\lim_{p\to\infty} \frac{\int |f|^{p+t}}{\int |f|^p}$.*

Esercizio 3.
Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $a_n(k) = \frac{n^k}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}$.

1. *Calcolare $\|a_n\|_p$ per $p \in [1, \infty]$ e dedurne che $\{a_n\}$ è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$.*
2. *Calcolare il limite puntuale $\lim_{n\to\infty} a_n(k)$ per k fissato.*
3. *Dimostrare che $\{a_n\}$ converge in ℓ_p se e solo se $p > 2$ e calcolarne il limite.*

Esercizio 4.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di insiemi di dimensione di Hausdorff s_n.

1. *Dimostrare che $H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = 0$ per ogni $s > \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$.*
2. *Dimostrare che $H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \infty$ per ogni $s < \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ e dedurne che la dimensione di $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ è $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$.*

3. Dimostrare che, se $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *è strettamente crescente, allora* $H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \begin{cases} 0 & se\ s \geq \lim_{n\to\infty} s_n \\ \infty & se\ s < \lim_{n\to\infty} s_n \end{cases}$.