AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2023-24)

Luca Battaglia

Esercizi su misure e integrali

Esercizio 1.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misura, $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di insiemi misurabili e

$$\limsup_{n\to+\infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} E_m.$$

1. *Dimostrare che $x \in \limsup_{n\to+\infty} E_n$ se e solo se $x \in E_n$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Dimostrare che $\limsup_{n\to+\infty} \chi_{E_n}(x) = \chi_{\limsup_{n\to+\infty} E_n}(x)$.*
3. *Utilizzando la monotonia di μ, dimostrare che se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$ allora $\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} E_n\right) = 0$.*

Esercizio 2.
Sia $C = \bigcap_{n=1} C_n$ l'insieme di Cantor "grasso" così definito: si parte da $C_0 = [0,1]$, si toglie dal centro un intervallo aperto lungo $\frac{1}{4}$ ottenendo $C_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$, si toglie poi dal centro di ciascuno dei due intervalli un intervallo aperto lungo $\frac{1}{16}$ e così via, togliendo al passo n-esimo $\frac{1}{4^n}$ dal centro dei 2^{n-1} intervalli che formano C_{n-1}.

1. *Calcolare $m(C_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Dimostrare che C ha interno vuoto.*
3. *Dimostrare che $m(C) = \frac{1}{2}$ e dedurre che esistono sottoinsiemi chiusi dei reali il cui bordo ha misura di Lebesgue positiva.*

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile rispetto alla misura di Lebesgue. Utilizzando opportunamente il Teorema della convergenza dominata ed eventualmente dei cambi di variabile, dimostrare che:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-nx^4} \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$
2. $\displaystyle\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right) \frac{|x|}{|x|+1} \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x + n\pi) \cos \frac{2x}{n} \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x.$

Esercizio 4.

Sia $f(x,t) = \dfrac{x^t - 1}{\log x}$ *e* $F(t) := \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x$.

1. *Dimostrare che se* $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *allora* $|f(x,t)| \leq \begin{cases} \dfrac{x^{t_0-\delta}+1}{|\log x|} & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ (|t_0| + \delta)x^{\min\{0, t_0-\delta\}} & \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ *e*

   dedurne che $F(t)$ *è continua per ogni* $t > -1$.

2. *Dimostrare che* $F(t)$ *è derivabile per ogni* $t > -1$ *e calcolare esplicitamente* $F'(t)$.

3. *Calcolare* $F(0)$ *e dedurne una formula esplicita per* $F(t)$.