# AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2023-24)

Luca Battaglia

## Esercizi su misure prodotto e misure di Radon

**Esercizio 1.**

*Sia, per* $k, l \in \mathbb{N}$, $a(k,l) = \begin{cases} \dfrac{1}{e-1} & se\ k = l \\ -e^{l-k} & se\ k > l \\ 0 & se\ k < l \end{cases}$.

1. *Calcolare, per* $l$ *fissato,* $\sum_{k=1}^{+\infty} a(k,l)$ *e, per* $k$ *fissato,* $\sum_{l=1}^{+\infty} a(k,l)$.
2. *Calcolare* $\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a(k,l)$ *e* $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} a(k,l)$ *e mostrare che sono due valori finiti ma differenti.*
3. *Dimostrare che* $\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |a(k,l)| = \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |a(k,l)| = +\infty$ *e confrontare con quanto visto a lezione.*

**Esercizio 2.**

*Sia, per* $N \in \mathbb{N}, p > N$,

$$J_{N,p} := \int_{(1,+\infty)^N} \frac{1}{(x_1 + \cdots + x_N)^p} \mathrm{d}x, \qquad dove\ (1,+\infty)^N = \{(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x_n > 1, \forall n = 1,\ldots,N\}$$

.

1. *Utilizzando il Teorema di Tonelli, dimostrare che* $J_{N,p} = \dfrac{1}{p-1}\displaystyle\int_{(1,+\infty)^{N-1}} \frac{1}{(x_1 + \cdots + x_{N-1} + 1)^{p-1}} \mathrm{d}x$.
2. *Utilizzando un opportuno cambio di variabile, dimostrare che* $J_{N,p} = \dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{p-N} J_{N-1,p-1}$.
3. *Dedurre dal punto precedente che* $J_{N,p} = \dfrac{1}{N^{p-N}\prod_{n=1}^{N}(p-n)}$.

**Esercizio 3.**

*Sia, per* $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in C([-1,1])^*$ *definito da:*

$$L_n f = \frac{2n^2}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n}} (1-x) f(x) \mathrm{d}x - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} f(x) \mathrm{d}x.$$

1. *Utilizzando il Teorema di Riesz, calcolare esplicitamente la norma* $\|L_n\|_{C([-1,1])^*} = \sup_{-1 \le f \le 1} |L_n f|$.
2. *Dimostrare che non esiste nessuna* $f \in C([-1,1])$ *tale che* $-1 \le f \le 1$ *e* $L_n f = \|L_n\|_{C([-1,1])^*}$.

3. *Trovare una misura con segno di Radon $\mu$ tale che* $L_n f \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{-1}^{1} f \mathrm{d}\mu$.

**Esercizio 4.**
*Siano $X, Y$ due spazi normati e $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ lo spazio prodotto con la norma $\|(x,y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$.*

1. *Dimostrare che il duale dello spazio prodotto è dato da $(X\times Y)^* = X^* \times Y^*$, che i suoi elementi agiscono come $(L_1, L_2)(x,y) = L_1 x + L_2 y$ per ogni $(L_1, L_2) \in X^* \times Y^*, (x,y) \in X \times Y$, e che la norma di un funzionale è $\|(L_1, L_2)\| = \max\{\|L_1\|_{X^*}, \|L_2\|_{Y^*}\}$.*

2. *Sia ora $C^1([0,1])$ lo spazio delle funzioni derivabili con derivata continua, con la norma $\|f\| := |f(0)| + \max_{[0,1]} |f'|$. Identificando $C^1([0,1])$ con $C([0,1]) \times \mathbb{R}$ attraverso la biiezione $f(x) \leftrightarrow (f'(x), f(0))$, dimostrare che ogni elemento del duale di $C^1([0,1])$ è del tipo*

$$Lf = \int f' \mathrm{d}\mu + c f(0)$$

*per un'unica coppia $(\mu, c) \in M([0,1]) \times \mathbb{R}$.*

3. *Descrivere, per $K \in \mathbb{N}$, il duale dello spazio $C^K([0,1])$ con la norma $\|f\| := |f(0)| + \ldots, \left|f^{K-1}(0)\right| + \max_{[0,1]} |f'|$.*