AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2024-25)

Luca Battaglia

(Note basate principalmente sul testo *Real analysis* di Gerald B. Folland)

Lezioni 1-2 del 23/09/2024

L'argomento di questo corso sarà la teoria della misura.
L'idea di partenza è di definire in modo rigoroso e generale le idee intuitive di lunghezza, area e volume. Rispetto alla teoria dell'integrazione di Riemann vista nei corsi di base, la teoria della misura che vedremo in questo corso richiederà la costruzione di un apparato teorico più elaborato, ma si rivelerà ben più maneggevole.
La teoria della misura infatti si adatta a molte situazioni in cui la teoria di Riemann non può essere applicata, e in modo particolare nei passaggi al limite e nelle operazioni di somme e unioni infinite. Anche per questo motivo, trova grandi applicazioni non solo nell'analisi, ma anche in altri rami della matematica come la probabilità e la geometria.
Dopo aver definito le nozioni e le proprietà di base delle misure, introdurremo una nuova teoria dell'integrazione che supera ed estende quella già vista nei corsi di base. Successivamente, estenderemo il concetto di misura affinché possa assumere anche valori negativi e vedremo la connessione con il calcolo differenziale. Vedremo poi come la teoria della misura permette di definire alcuni degli spazi funzionali tra i più importanti in analisi funzionale. Infine, introdurremo alcune misure speciali su $\mathbb{R}^N$, dette misure di Hausdorff, che daranno una nozione efficace di misura di una sottoinsieme di dimensione più bassa, e avranno dunque forti legami con la geometria.

Prima di poter definire una misura sarà però necessario un passaggio preliminare: dovremo stabilire quali sottoinsiemi di un dato spazio ambiente vogliamo misurare.
Sarà infatti molto difficile in generale trovare delle misure che soddisfino le proprietà ragionevoli che ci si aspetta, come la positività e il fatto che la misura di insiemi disgiunti sia la somma delle loro misure, su tutti i sottoinsiemi.
L'esempio che vediamo ora ci mostra che questo problema sorge anche in casi particolarmente semplici, come la definizione di "lunghezza" di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Proposizione.
Non esiste alcuna funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ che verifichi le seguenti proprietà:

1. $\mu([0, 1)) = 1$;
2. $\mu(E + x) = \mu(E)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$, *dove* $E + x = \{y + x : y \in E\}$;
3. *Se* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sono insiemi numerabili a due a due disgiunti* ($E_n \cap E_m = \emptyset$ *per ogni* $n \neq m$) *allora* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Dimostrazione.
Supponiamo che le tre proprietà siano vere e cerchiamo di ottenere una contraddizione.
Definiamo su $[0, 1)$ la relazione di equivalenza $\sim$ data da: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$; prendiamo l'insieme N ottenuto scegliendo (grazie all'assioma della scelta) esattamente un elemento per ciascuna classe di equivalenza. Infine, per $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ definiamo l'insieme N_q ottenuto traslando N di q e poi "spostando" all'interno di $[0, 1)$ la parte che esce fuori, ovvero:

$$N_q \quad = \quad (N \cap [0, 1 - q)) + q \cup (N \cap [1 - q, 1)) + q - 1$$

$$= \quad \{x+q : x \in N \cap [0,1-q)\} \cup \{x+q-1 : x \in N \cap [1-q,1)\}.$$

Per la costruzione di N_q e le proprietà 2 e 3, N e N_q avranno la stessa misura, in quanto:

$$\begin{aligned} \mu(N_q) &= \mu((N \cap [0,1-q)) + q \cup (N \cap [1-q,1)) + q - 1) \\ &\overset{(3)}{=} \mu((N \cap [0,1-q)) + q) + \mu((N \cap [1-q,1)) + q - 1) \\ &\overset{(2)}{=} \mu(N \cap [0,1-q)) + \mu(N \cap [1-q,1)) \\ &\overset{(3)}{=} \mu((N \cap [0,1-q)) \cup (N \cap [1-q,1))) \\ &= \mu(N). \end{aligned}$$

Del resto, per come è stato costruito N, ogni elemento di $[0,1)$ appartiene esattamente a uno degli N_q, dunque $[0,1)$ è unione disgiunta numerabile degli N_q e quindi utilizzando la precedente uguaglianza si ottiene la seguente contraddizione:

$$1 \overset{(1)}{=} \mu([0,1)) \overset{(3)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(N_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu(N) = 0 \\ \infty & \text{se } \mu(N) > 0 \end{cases}.$$

□

Definizione.
*L'insieme N definito nella dimostrazione della precedente proposizione si chiama **insieme di Vitali**.*

Anche in base a questo risultato, ci interesserà "misurare" soltanto delle famiglie di sottoinsiemi di un dato insieme; per poter lavorare meglio con queste famiglie di insiemi, le richiederemo chiuse rispetto alle operazioni insiemistiche elementari di unione e di complementare:

Definizione.
*Una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X si dice **algebra** di insiemi se contiene l'insieme vuoto, è chiusa rispetto all'unione finita e al passaggio al complementare, cioè:*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$;
- $E \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad E^c \in \mathcal{A}$.

*Una famiglia $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X si dice **σ-algebra** se è un'algebra e inoltre è chiusa rispetto all'unione numerabile, cioè:*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $E_n \in \mathcal{A} \, \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$;
- $E \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad E^c \in \mathcal{A}$.

Osservazione.

1. *Un'algebra su X, e in particolare una σ-algebra, contiene sempre tutto l'insieme $X = \emptyset^c$, perché contiene il vuoto ed è chiusa rispetto al complementare.*

2. *Un'algebra è chiusa anche rispetto alle intersezioni finite: infatti, se $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ allora $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c \in \mathcal{A}$; Allo stesso modo, una σ-algebra è chiusa rispetto alle intersezioni numerabili.*

Esempio.

1. *Ogni insieme X ha sempre due σ-algebre banali date da $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$.*

2. *Un'altra algebra su un qualsiasi insieme X è data dagli insiemi finiti o co-finiti, ovvero:*

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : \, E \text{ è finito oppure } E^c \text{ è finito}\};$$

se X è infinito, è strettamente contenuta in $\mathcal{P}(X)$ ma non è una σ-algebra; infatti, un insieme numerabile E con E^c infinito non apparterrà ad $\mathcal{A}$, ma $E = \bigcup_{n=1} \{x_n\}$ è unione numerabile dei suoi punti, che sono elementi di $\mathcal{A}$.

3. *Un'algebra su $\mathbb{R}$ è data dalle unioni finite di intervalli semi-aperti, ovvero*

$$\mathcal{A} = \{(a_1, b_1] \cup \cdots \cup (a_N, b_N] : \, -\infty \leq a_1 < b_1 < \cdots < a_N < b_N \leq \infty\};$$

Anche questa algebra non è una σ-algebra, perché ad esempio contiene tutti gli intervalli del tipo $E_n := \left(0, \dfrac{n}{n+1}\right]$, per $n \in \mathbb{N}$ ma non la loro unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1)$.

4. *Un'intersezione qualsiasi di (σ-)algebre è ancora una (σ-)algebra.*

Definizione.
*Data una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, la σ-algebra **generata** da $\mathcal{E}$ è la più piccola σ-algebra che lo contiene, ovvero*

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X) : \, \mathcal{E} \subset \mathcal{M}, \, \mathcal{M} \text{ è una } \sigma\text{-algebra}\}.$$

Esempio.
La σ-algebra generata dall'algebra dei finiti o cofiniti è data dagli insiemi numerabili o co-numerabili, ovvero:

$$\mathcal{M} = \{E \subset X : \, X \text{ è numerabile oppure } X^c \text{ è numerabile}\}.$$

Poiché ci interesserà calcolare la misura degli intervalli della retta reale, ci concentreremo ora su un caso particolarmente di importante di σ-algebra, quella generata dagli intervalli (e, più in generale, dagli aperti euclidei).

Definizione.
*La più piccola σ-algebra contenente gli insiemi aperti di uno spazio metrico X si chiama **σ-algebra di Borel** su X e si indica con la notazione $\mathcal{B}_X$. I suoi elementi si chiamano **insiemi boreliani**.*

Proposizione.
La σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dei boreliani su $\mathbb{R}$ è generata, equivalentemente, da:

1. *Gli insiemi chiusi;*
2. *Gli intervalli aperti $\{(a, b) : \, -\infty < a < b < \infty\}$;*
3. *L'algebra delle unioni finite di intervalli semi-aperti definita in precedenza;*
4. *Gli intervalli chiusi; oppure, gli intervalli semiaperti; oppure, le semirette aperte; oppure, le semirette chiuse.*

Lezioni 3-4 del 24/09/2024

Dimostrazione della proposizione.

1. Segue dal fatto che gli aperti sono i complementari dei chiusi e viceversa, dunque ogni σ-algebra contiene tutti i chiusi se e solo se contiene tutti gli aperti.

2. La σ-algebra generata dagli aperti ovviamente conterrà quella generata dagli intervalli, che sono un caso particolare di aperti. Per mostrare l'altra inclusione, sarà sufficiente far vedere che ogni aperto è unione numerabile di intervalli aperti: prendiamo dunque un aperto $A \subset \mathbb{R}$, che sarà del tipo $A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x)$ per opportuni a_x, b_x; scegliendo un sottoinsieme denso numerabile in $B \subset A$ e avremo $A = \bigcup_{x \in B} (a_x, b_x)$, che è unione numerabile di intervalli aperti.

3. Scrivendo $(a, b] = (a, \infty) \cap (b, \infty)^c$ otteniamo che ogni intervallo $(a, b]$ è boreliano, e dunque lo sono tutte le loro unioni finite, il che mostra un'inclusione; per ottenere l'altra, basterà analogamente scrivere ogni intervallo aperto come unione numerabile di intervalli semi-aperti, ovvero $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$.

4. Come nei punti precedenti, scrivendo un insieme di ciascuna famiglia di insieme a partire da intervalli aperti, e viceversa, utilizzando unioni, intersezioni e complementari.

□

Concludiamo questa parte sulle σ-algebre vedendo come si costruisce una σ-algebra sul prodotto di due o più spazi, con particolare interesse al caso dei boreliani di $\mathbb{R}^N$.

Definizione.
Date due σ-algebre $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ rispettivamente su X, Y, la σ-algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ su $X \times Y$ è quella generata dalle preimmagini rispetto alle proiezioni degli elementi di $\mathcal{M}, \mathcal{N}$:

$$\{E \times Y : E \in \mathcal{M}\} \cup \{X \times F : F \in \mathcal{N}\}.$$

Osservazione.

1. *La σ-algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ è generata equivalentemente dai rettangoli $E \times F$ al variare di $E \in \mathcal{M}, F \in \mathcal{N}$, come segue scrivendo $E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F)$.*

2. *Se $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sono generate rispettivamente da $\mathcal{E}, \mathcal{F}$, allora $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ è generata equivalentemente dagli insiemi $E \times Y$ oppure $Y \times F$ al variare di $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$; ragionando come prima, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ è generata anche dai rettangoli $E \times F$ con $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$.*

Proposizione.
La σ-algebra di Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ su coincide con la σ-algebra prodotto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dei boreliani su $\mathbb{R}$.
Analogamente, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{N+M}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^M}$ per $N, M \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.
Grazie alle osservazioni precedenti, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è generata dai rettangoli aperti del tipo $(a, b) \times (c, d)$; poiché sono insiemi aperti in $\mathbb{R}^2$, allora $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è contenuta $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Inoltre, ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ sarà del tipo

$$A = \bigcup_{x=(x_1,x_2) \in A} (x_1 - r_x, x_1 + r_x) \times (x_2 - r_x, x_2 + r_x)$$

per qualche $r_x > 0$; restringendo l'unione a un sottoinsieme denso e numerabile $B \subset A$ otteniamo che $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, dunque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

Avendo introdotto le σ-algebre, cioè le famiglie di insiemi che vorremo "misurare", possiamo finalmente introdurre il concetto di misura con la proprietà fondamentale che sia additiva su insiemi disgiunti.

Definizione.
*Una **misura** su una σ-algebra $\mathcal{M}$ su X è una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ che associa ad ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ un valore tra 0 e ∞ che sia numerabilmente additiva, cioè:*

$$E_n \cap E_m = \emptyset \, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \qquad \Rightarrow \qquad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

*La terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si chiama **spazio misura** e gli insiemi di $\mathcal{M}$ si chiamano **μ-misurabili**.*
*μ si dice **finita** se $\mu(X) < \infty$; μ si dice **σ-finita** se esistono $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ tali che $\mu(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.*

Esempio.

1. *Dato un qualsiasi insieme X, una misura su $\mathcal{P}(X)$ è la misura che conta $\#$ definita come*
$$\#(E) = \begin{cases} N & \text{se } E \text{ ha esattamente } N \text{ elementi} \\ \infty & \text{se } E \text{ ha infiniti elementi} \end{cases}$$
$\#$ è finita se e solo se X è finito, è σ-finita se e solo se X è numerabile.

2. *Dato un qualsiasi insieme X e un elemento $x_0 \in X$, una misura su $\mathcal{P}(X)$ è la misura di Dirac centrata in x_0 data da*
$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

3. *La somma $\mu_1 + \mu_2$ di due misure μ_1, μ_2 su $\mathcal{M}$ è una misura su $\mathcal{M}$. Il prodotto $c\mu$ di una misura μ su $\mathcal{M}$ per una costante $c \geq 0$ è una misura su $\mathcal{M}$.*

4. *Data una misura μ su $\mathcal{M}$ e un misurabile $A \in \mathcal{M}$, la restrizione $\mu|_A$ di μ ad A data da $\mu|_A(E) := \mu(E \cap A)$ è una misura.*

Teorema (Proprietà fondamentali delle misure)**.** *Su uno spazio misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ valgono le seguenti proprietà:*

Misura del vuoto $\mu(\emptyset) = 0$;

Monotonia *Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$ allora $\mu(E) \leq \mu(F)$, e in particolare se μ è finita allora $\mu(E) < \infty$ per ogni $E \subset X$;*

Subadditività *Se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ allora $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$;*

Unione crescente *Se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ e $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$;*

Intersezione decrescente *Se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$, $E_n \supset E_{n+1}$ e $\mu(E_1) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$;*

Osservazione.
Per ottenere la formula della misura dell'intersezione è necessario assumere $\mu(E_1) < \infty$ o in alternativa $\mu(E_N) < \infty$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ (sostituendo E_1 con E_N nella dimostrazione), ma senza questa ipotesi il risultato è falso. Considerando ad esempio lo spazio misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ e $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ otteniamo $\mu(E_n) = \infty$ per ogni n e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, dunque $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ ma $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.

Lezioni 5-6 del 25/09/2024

Dimostrazione delle Proprietà fondamentali delle misure.

Misura del vuoto Basta prendere un'unione di nessun insieme nella proprietà fondamentale di additività numerabile.

Monotonia Scrivendo $F = E \cup (F \setminus E)$ come unione disgiunta, avremo

$$\mu(F) = \mu(E \cup (F \setminus E)) = \mu(E) + \underbrace{\mu(F \setminus E)}_{\geq 0} \geq \mu(E).$$

Subadditività Gli insiemi $F_n := E_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} E_m \in \mathcal{M}$ sono disgiunti e verificano $F_n \subset E_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, dunque dall'additività numerabile e dalla monotonia otteniamo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Unione crescente Gli insiemi $F_n := E_n \setminus E_{n-1} \in \mathcal{M}$ sono disgiunti e verificano $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e $E_n = \bigcup_{m=1}^{n} F_m$, dunque

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(F_m) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} F_m\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Intersezione decrescente Definendo $F_n := E_1 \setminus E_n$ si ottiene $E_n = E_1 \setminus F_n$, da cui $\mu(E_n) + \mu(F_n) = \mu(E_1)$, ovvero $\mu(F_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n)$, che è finito per ipotesi; ragionando allo stesso modo con l'unione dei F_n si ottiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(E_1) - \mu\left(E_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$, dunque applicando il punto precedente agli F_n si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(E_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\
&= \mu(E_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\
&= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \\
&= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

□

Dato uno spazio misura, ci piacerebbe poter dire che tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura zero hanno anch'essi misura zero; ciò segue dalla monotonia se i sottoinsiemi sono μ-misurabili, ma potrebbero non essere misurabili. A noi interesserà in modo particolare il caso in cui i sottoinsiemi di misura nulla sono misurabili, una condizione utile che semplificherà alcune dimostrazioni.
Il prossimo risultato ci mostra che è possibile allargare "quanto basta" una σ-algebra per ottenere questa proprietà.

Definizione.
Una misura su una σ-algebra $\mathcal{M}$ si dice ***completa*** *se i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla sono misurabili, cioè*

$$E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0,\ F \subset E \qquad \Rightarrow \qquad F \in \mathcal{M}.$$

Osservazione.
Se μ è completa, ogni sottoinsieme degli insiemi di misura nulla ha anch'esso misura nulla.

Teorema (del completamento di misure)**.**
Dato uno spazio misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, la famiglia di insiemi definita da

$$\overline{\mathcal{M}} := \{E \cup F : E \in \mathcal{M},\, F \subset N \text{ per qualche } N \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(N) = 0\}$$

è una σ-algebra ed esiste un'unica estensione $\overline{\mu}$ di μ a una misura completa su $\mathcal{M}$.
*$\overline{\mu}$ e $\overline{\mathcal{M}}$ si dicono rispettivamente **completamento** di μ e **completamento** di $\mathcal{M}$ rispetto a μ.*

Dimostrazione.
Mostriamo che $\overline{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra: anzitutto, è chiusa rispetto all'unione numerabile, perché se prendo $E_n \cup F_n$ con $E_n \in \mathcal{M}$ e $F_n \subset N_n$ con $N_n \in \mathcal{M}$ e $\mu(N_n) = 0$, allora $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}_{\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n}$, con $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} N_n = 0$, dunque $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ha misura nulla e quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n) \in \overline{\mathcal{M}}$. Mostriamo ora la chiusura di $\overline{\mathcal{M}}$ rispetto al complementare, da cui seguirà che $\overline{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra: dato $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, con $E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N, N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0$, essendo F sottoinsieme di N scriveremo

$$(E \cup F)^c = ((E \cup N) \cap (E \cup F \cup N^c))^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus (E \cup F)),$$

con $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ e $N \setminus (E \cup F) \subset N$ che ha misura nulla; dunque $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$ che è quindi una σ-algebra.
Riguardo $\overline{\mu}$, sarà sufficiente definire $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$: è ben definita perché se $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ con $F_2 \subset N_2$ allora $E_1 \subset E_2 \cup N_2$ e dunque $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$ e allo stesso modo $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$; si verifica facilmente l'additività numerabile e la completezza, in quanto $\overline{\mathcal{M}}$ contiene tutti i sottoinsiemi di misura nulla. Per l'unicità, se $\widetilde{\mu}$ è un'altra estensione di μ a $\overline{\mathcal{M}}$, per monotonia dovrà essere $\widetilde{\mu}(E \cup F) \geq \mu(E)$ per ogni E, F: se esistessero E_0, F_0, N_0 con $E_0 \in \mathcal{M}, F_0 \subset N_0, \mu(N_0) = 0$ e $\overline{\mu}(E_0 \cup F_0) > \mu(E_0)$, allora otterremmo l'assurdo

$$\mu(E_0) < \widetilde{\mu}(E_0 \cup F_0) \leq \mu(E_0 \cup N_0) \leq \mu(E_0) + \mu(N_0) = \mu(E_0).$$

□

Vediamo ora una strategia per costruire misure: l'idea di base è quella di approssimare un insieme qualsiasi dall'esterno con degli insieme elementari, come ad esempio i rettangoli nel piano. In questa maniera otterremo qualcosa che non ha tutte le proprietà di una misura, ma è una misura se ristretta a una opportuna famiglia di insiemi.

Definizione.
*Una **misura esterna** su X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ che verifichi:*

Misura del vuoto $\mu^*(\emptyset) = 0$;

Monotonia Se $A \subset B$ *allora* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

Subadditività $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *per ogni* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$.

Esempio.
Una misura su $\mathcal{P}(X)$ è in particolare una misura esterna su X.

Proposizione.
Sia $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia contenente l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'intero spazio X e sia $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ tale che $\rho(\emptyset) = 0$. Allora, una misura esterna μ^* su X è data da:

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) :\, E_n \in \mathcal{E},\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Dimostrazione.
Anzitutto, la definizione è ben posta perché posso sempre prendere $E_n = X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque non sto facendo l'estremo inferiore dell'insieme vuoto. Verifichiamo ora le tre proprietà delle misure esterne:

Misura del vuoto Se $A = \emptyset$, prendendo $E_n = \emptyset$ per ogni n ottengo $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Monotonia Se $A \subset B$ allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ perché è l'estremo inferiore di un insieme più grande.

Subadditività Dati $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\varepsilon > 0$, avremo degli $\{E_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ tali che $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m}$ e $\sum_{m=1}^{\infty} \rho(E_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$; dunque avrò $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$ e $\sum_{n,m} \rho(E_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$, da cui $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$, ma essendo ε arbitrario otteniamo la subadditività.

$\square$

Lezioni 7-8 del 30/09/2024

Definizione.
Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice ***μ^*-misurabile*** *rispetto a una misura esterna μ^* su X se per ogni $E \subset X$ si ha*
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Osservazione.

1. *La disuguaglianza $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ è sempre verificata, come segue dalla subadditività scrivendo $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$, dunque richiedere che un insieme sia μ^*-misurabile equivale a chiedere la disuguaglianza opposta; quest'ultima è banalmente vera se $\mu^*(E) = \infty$ e dunque la μ^*-misurabilità sarà equivalente a:*
$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \forall E \subset X \text{ tale che } \mu^*(E) < \infty.$$

2. *Scegliendo un $E \supset A$ nella definizione di misurabilità otteniamo $\mu^*(E) = \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A)$, dunque la misura di esterna A dev'essere uguale a quella di un qualsiasi "contenitore" E meno la misura del complementare di A in E; questa differenza può essere interpretata come una "misura interna" di A.*

Teorema (di Carathéodory)**.**
Gli insiemi μ^*-misurabili rispetto a una misura esterna μ^* su X sono una σ-algebra, su cui μ^* è una misura completa.

Esempio.
La "misura esterna" di Peano-Jordan su $\mathbb{R}^N$, introdotta nei corsi di base di calcolo, corrisponde alla scelta come insiemi elementari in $\mathcal{E}$ di rettangoli del tipo $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_N, b_N]$ definendo $\rho((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_N, b_N]) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_N - a_N)$, ma ammettendo nella definizione di μ^* solo unioni finite e non numerabili. Questa differenza è in realta cruciale perché in questo modo non si ottiene una vera misura esterna in quanto non vale la subadditività: ad esempio, i punti hanno "misura esterna" nulla ma $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^N$, unione numerabile di punti, ha misura esterna pari a 1.
Il Il Teorema di Carathéodory non può essere dunque applicato in questo caso, e infatti i "misurabili" non sono una σ-algebra perché, come prima, gli insiemi con un solo punto sono misurabili mentre $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^N$ non lo è.

Dimostrazione del Teorema di Carathéodory.

Passo 1 La famiglia $\mathcal{M}$ dei μ^*-misurabili è un'algebra:
Si verifica facilmente che $\emptyset$ è misurabile, e inoltre $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto al complementare perché la definizione rimane la stessa cambiando A con A^c. Facciamo vedere che è chiusa rispetto a unioni finite: presi $A, B \in \mathcal{M}$ e $E \subset X$, scrivendo
$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup ((E \cap A) \setminus B) \cup ((E \setminus A) \cap B) \qquad (E \setminus A) \setminus B = E \setminus (A \cup B)$$
si ottiene
$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*((E \cap A) \setminus B) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B) \\
&\geq \mu^*((E \cap A \cap B) \cup ((E \cap A) \setminus B) \cup ((E \setminus A) \cap B)) + \mu^*(E \setminus (A \cup B)) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \setminus (A \cup B)).
\end{aligned}$$

Passo 2 $\mathcal{M}$ è una σ-algebra:
Anzitutto, si può sempre supporre che l'unione degli insiemi $A_n \in \mathcal{M}$ sia disgiunta, a meno di sostituire A_n con $A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m$: se $A_n \cap A_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$, allora $\bigcup_{m=1}^{n} A_m \setminus A_n = \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m$, da cui
$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \mu^*\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{n} A_m \cap A_n\right) + \mu^*\left(\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) \setminus A_n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m\right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mu^*(E \cap A_m).
\end{aligned}
$$

Essendo poi $\mathcal{M}$ un'algebra,

$$
\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)\right) \geq \sum_{m=1}^{n} \mu^*(E \cap A_m) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)
$$

e, passando al limite per $n \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \\
&\geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)\right) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \\
&= \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) + \mu^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right),
\end{aligned}
$$

cioè $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Passo 3 La restrizione di μ^* a $\mathcal{M}$ è una misura:
Presi $A_n \in \mathcal{M}$ disgiunti, scegliendo $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nella formula precedente otteniamo $\mu^*\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, mentre la disuguaglianza opposta è sempre valida per subadditività, quindi μ^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$ ed è dunque una misura.

Passo 4 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è completa:
Se $\mu^*(A) = 0$ allora $\mu^*(E \cap A) = 0$ per ogni E e dunque

$$
\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A),
$$

e cioè $A \in \mathcal{M}$.

□

All'atto pratico, applicheremo il Teorema di Carathéodory per estendere misure da un'algebra a una σ-algebra.

Definizione.
*Una **pre-misura** su un'algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è una funzione $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ che sia numerabilmente additiva, cioè:*

$$
\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A},\ A_n \cap A_m = \emptyset\, \forall n \neq m,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).
$$

Teorema (di estensione di misure)**.**
Data una pre-misura μ_0 su un'algebra $\mathcal{A}$ in X, la misura esterna su X definita da

$$
\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) :\ A_n \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}
$$

verifica le seguenti proprietà:

1. μ^* coincide con μ_0 su $\mathcal{A}$;

2. Ogni insieme di $\mathcal{A}$ è μ^*-misurabile;

3. Esiste una misura μ sulla σ-algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ generata da $\mathcal{A}$ che estende μ_0, e l'estensione è unica se μ_0 è σ-finita.

Dimostrazione.

1. Anzitutto, se $E \in \mathcal{A}$, allora $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$ perché posso prendere $A_1 = E, A_n = \emptyset$ per $n \geq 2$. Inoltre, se $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$, potrò scrivere $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ come unione disgiunta di elementi di $\mathcal{A}$ con $B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m \right) \subset A_n$, da cui $\mu_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$; essendo il ricoprimento A_n arbitrario, otteniamo l'altra disuguaglianza $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

2. Presi $A \in \mathcal{A}$ e $E \subset X$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ tali che $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$; poiché $E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$ e $E \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)$, per l'additività di μ_0 su $\mathcal{A}$ e le proprietà della misura esterna μ^* otteniamo

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \setminus A) \\
&\geq \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A \right) + \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A \right) \\
&\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)
\end{aligned}$$

e cioè, per l'arbitrarietà di ε, A è μ^*-misurabile.

$\square$

Lezioni 9-10 del 01/10/2024

Fine della dimostrazione del Teorema di estensione di misure.

3 Poiché gli insiemi di $\mathcal{A}$ sono μ^*-misurabili, anche $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sarà un sottoinsieme della σ-algebra dei μ^*-misurabili, su cui μ^* è una misura per il Teorema di Carathéodory, dunque è sufficiente prendere come μ la restrizione di μ^* a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
Supponiamo poi che esista un'altra estensione ν; preso $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ tali che $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, avremo $\nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ e dunque, per l'arbitrarietà di $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E)$. Se poi $\mu(E) < \infty$, possiamo scegliere gli A_n in modo che

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus E\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(E) < \varepsilon,$$

allora

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) \\
&= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= \nu(E) + \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus E\right) \\
&\leq \nu(E) + \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus E\right) \\
&\leq \nu(E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

e quindi $\mu(E) \leq \nu(E)$; infine, se μ_0 è σ-additiva allora $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con $X_n \cap X_m = \emptyset$ per $n \neq m$ e $\mu(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$ per ogni n, dunque, usando la finitezza di $\mu|_{X_n}$ e quanto appena visto,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = \nu(E).$$

□

Possiamo ora applicare i risultati teorici appena visti al caso dei boreliani reali: inizieremo definendo la misura di un intervallo, che sarà pari alla sua lunghezza, ed estenderemo il concetto a una classe molto più ampia di insiemi.

Definizione.
*Una **misura di Borel** su $\mathbb{R}$ è una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ di Borel su $\mathbb{R}$.*
*Data una misura μ di Borel finita su $\mathbb{R}$, la sua **funzione di distribuzione** è $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definita da $F(x) = \mu((-\infty, x])$.*

Osservazione.
La funzione di distribuzione di una misura di Borel è crescente, grazie alla monotonia delle misure, ed è anche continua da destra, come segue applicando la formula dell'intersezione decrescente

$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]$ con $x_n \underset{n\to\infty}{\searrow} x$. Applicando invece la formula dell'unione crescente otteniamo $(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]$ per $x_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} x$, dunque F sarà continua a destra (e dunque continua) in un punto x se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$.

Esempio.
La misura di Dirac centrata in $x_0 \in \mathbb{R}$, data da $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & se\ x_0 \in E \\ 0 & se\ x_0 \notin E \end{cases}$, è una misura di Borel finita che ha per funzione di distribuzione $F(x) = \chi_{[x_0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \geq x_0 \\ 0 & se\ x < x_0 \end{cases}$.

Teorema (di costruzione di misure di Borel)**.**
Data una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua da destra esiste un'unica misura di Borel μ_F su $\mathbb{R}$ tale che $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ per ogni $a < b$; presa un'altra G, $\mu_F = \mu_G$ se e solo se $F - G$ è costante.
Viceversa, data una misura di Borel μ su $\mathbb{R}$, che sia finita sugli insiemi limitati, la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & se\ x < 0 \end{cases}$$

è crescente e continua da destra e verifica $\mu = \mu_F$.

Definizione.
*Data una funzione crescente e continua da destra F, la **misura di Lebesgue-Stieltjes** associata a F è il completamento di μ_F, che indicheremo con lo stesso simbolo μ_F, ovvero:*

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n)) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \right\}.$$

*Data una misura di Lebesgue-Stieltjes μ, denoteremo con il simbolo $\mathcal{M}_\mu$ il suo dominio, cioè il completamento di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ rispetto a μ. La **misura di Lebesgue** è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione $F(x) = x$, cioè tale che $\mu((a, b]) = b - a$ per ogni $a < b$ e si indica con m, dunque:*

$$m(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \right\}.$$

*La σ-algebra dominio di m si chiama dei **Lebesgue misurabili** e si denota con $\mathcal{L}$.*

Osservazione.

1. *Se μ è finita, la funzione F definita nel teorema coincide con la funzione di distribuzione di μ, a meno di aggiungere la costante $\mu((-\infty, 0])$.*
2. *Nel caso di misure finite, la F che "genera" μ_F è unica se si impone ad esempio che $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, e coincide con la funzione di distribuzione; abbiamo dunque una corrispondenza biunivoca tra misure di Borel finite e funzioni crescenti continue a destra che si annullano all'infinito.*

Lemma.
Data $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua da destra, una pre-misura sull'algebra $\mathcal{A}$ delle unioni finite di intervalli semi-aperti è data da

$$\mu_0 \left(\bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n] \right) = \sum_{n=1}^{N}(F(b_n) - F(a_n)).$$

Dimostrazione del Teorema di costruzione di misure di Borel.
Per il lemma precedente, una F induce una pre-misura sulle unioni finite $\mathcal{A}$ di intervalli semi-aperti, e chiaramente F e G inducono la stessa pre-misura se e solo se coincidono a meno di costanti;

dunque, per il Teorema di estensione di misure la pre-misura può essere estesa a $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e infine, scrivendo $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+1]$ otteniamo che l'estensione μ è σ-finita e quindi unica.
Viceversa, F è crescente per la monotonia di μ ed è continua da destra per le formule di unione crescente e intersezione decrescente; chiaramente $\mu = \mu_F$ su $\mathcal{A}$ e dunque, dal Teorema di estensione di misure, $\mu = \mu_F$ su tutto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

Lezioni 11-12 del 03/10/2024

Dimostrazione del lemma.
L'additività finita segue immediatamente dalla definizione di μ_0.
Supponiamo ora che $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ siano tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e mostriamo che $\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$. Anzitutto, a meno di dividere in un numero finito di partizioni, possiamo supporre che $A_n = (a_n, b_n]$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (a, b]$; dunque, usando l'additività finita otteniamo, per ogni $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu_0((a,b]) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{N}(a_n,b_n]\right) + \mu_0\left((a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{N}(a_n,b_n]\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{N}(a_n,b_n]\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu_0((a_n,b_n]),$$

e mandando N a ∞ otteniamo una $\mu_0((a,b]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0((a_n,b_n])$.
Per mostrare la disuguaglianza opposta, supponiamo anzitutto che $a, b \in \mathbb{R}$. Grazie alla continuità a destra, per $\varepsilon > 0$ fissato esiste $\delta > 0$ tale che $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$ ed esiste δ_n tale che $F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$; inoltre gli aperti $(a_n, b_n + \delta_n)$ coprono il compatto $[a+\delta, b]$, dunque possiamo estrarne un ricoprimento finito $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ che, a meno di riordinare gli indici, verificherà anche $b_n + \delta_n > a_{n+1}$, da cui $F(b_n + \delta_n) \geq F(a_{n+1})$. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned}
\mu_0((a,b]) &= F(b) - F(a) \\
&\leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} (F(b_n + \delta_n) - F(a_n)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \left(F(b_n) - F(a_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione per l'arbitrarietà di ε.
Infine, se $a = -\infty$, ripetiamo lo stesso ragionamento su $[-M, b]$ ottenendo $\mu_0((-M, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ e poi passiamo al limite per $M \to \infty$; analogamente, se $b = \infty$ ragioniamo su $[a, M]$ e poi mandiamo M a ∞. □

Vediamo adesso alcune utili proprietà di queste misure di Borel che abbiamo costruito.

Teorema (di approssimazione con aperti e compatti)**.**
Se μ è una misura di Lebesgue-Stieltjes e $E \in \mathcal{M}_\mu$, allora

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \supset E,\ A \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compatto}\}.$$

Osservazione.
Il Teorema di approssimazione con aperti e compatti è falso se si approssima dall'interno con aperti o dall'esterno con chiusi o compatti: prendendo ad esempio $\mu = \delta_0$, abbiamo $\mu((-\infty, 0]) = 1$ ma $\mu(A) = 0$ per ogni aperto contenuto in $(-\infty, 0]$; analogamente, $\mu((0,1)) = 0$ ma $\mu(C) = 1$ per ogni chiuso contenente $(0,1)$.

Lemma.
Se $E \in \mathcal{M}_\mu$ allora

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n)) :\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right\}.$$

Dimostrazione.
Chiamando ν la quantità a destra, se $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ possiamo scrivere ciascun intervallo come unione disgiunta di intervalli semi-aperti $(a_n,b_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\underbrace{\left(a_n + \frac{m-1}{m}(b_n-a_n), a_n + \frac{m}{m+1}(b_n-a_n)\right]}_{=:I_{m,n}}$;

dunque, $E \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} I_{n,m}$ quindi

$$\mu(E) \le \sum_{n,m=1}^{\infty}\mu(I_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n)),$$

da cui $\mu(E) \le \nu(E)$.
Per ottenere l'altra disuguaglianza, osserviamo anzitutto che

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n]) :\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]\right\}.$$

Prendiamo dunque, per $\varepsilon > 0$ fissato, $\{(a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ che ricoprono E tali che $\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n]) \le \mu(E)+\varepsilon$; prendendo $\delta_n > 0$ tale che $F(b_n+\delta_n) - F(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (come nella dimostrazione del lemma precedente), avremo $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n+\delta_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n+\delta_n)) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n+\delta_n]) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu((a_n,b_n]) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \le \mu(E)+2\varepsilon,$$

pertanto $\nu(E) \le \mu(E)$. □

Dimostrazione del Teorema di approssimazione con aperti e compatti.
Per la prima uguaglianza, che è ovvia per gli insiemi di misura infinita, osserviamo che $\mu(A) \ge \mu(E)$ per ogni aperto $A \supset E$, dunque $\mu(E)$ è sempre minore o uguale dell'estremo inferiore, e per mostrare l'uguaglianza basterà trovare, dati $E \in \mathcal{M}$ e $\varepsilon > 0$, un aperto $A \supset E$ tale che $\mu(A) \le \mu(E)+\varepsilon$. Dal lemma precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono degli intervalli $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ che ricoprono E e $\mu(E) \ge \sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n)) - \varepsilon$, dunque $A := \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ verifica $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n)) \le \mu(E)+\varepsilon$.
Per la seconda uguaglianza, come prima $\mu(E)$ è sempre maggiore o uguale dell'estremo superiore e dunque basterà mostrare l'altra disuguaglianza; se E è limitato, allora $\overline{E}\setminus E$ avrà misura finita e dunque, dalla prima uguaglianza, posso trovare un aperto $A \supset \overline{E}\setminus E$ tale che $\mu(A) \le \mu\left(\overline{E}\setminus E\right)+\varepsilon$, quindi $K := \overline{E}\setminus A = E \setminus (E\cap A)$ è un compatto che verifica:

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E\cap A) = \mu(E) - (\mu(A) - \mu(A\setminus E)) \ge \mu(E) - \mu(A) + \mu\left(\overline{E}\setminus E\right) \ge \mu(E) - \varepsilon,$$

che dimostra l'uguaglianza.Infine, se E è illimitato, ripetendo il ragionamento per $E_n := E\cap(n,n+1]$ con $n \in \mathbb{Z}$ trovo $K_n \subset E_n$ con $\mu(K_n) \ge \mu(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$; dunque, $\bigcup_{n=-N}^{N} K_n$ è un compatto contenuto in E che verifica $\mu\left(\bigcup_{n=-N}^{N} K_n\right) \ge \mu\left(\bigcup_{n=-N}^{N} E_n\right) - \varepsilon$, e poiché $\mu\left(\bigcup_{n=-N}^{N} E_n\right) \underset{N\to\infty}{\to} \mu(E)$ la dimostrazione è completa. □

Corollario.
Per un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ le tre seguenti condizioni si equivalgono:

1. $E \in \mathcal{M}_\mu$;
2. $E = A \setminus N$ *con* A *intersezione numerabile di aperti e* $\mu(N) = 0$;
3. $E = B \cup M$ *con* B *unione numerabile di chiusi e* $\mu(M) = 0$.

Inoltre, se $E \subset \mathbb{R}$ *è misurabile e ha misura* $\mu(E) < \infty$, *allora esiste un'unione finita* A *di intervalli aperti tale che* $\mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

Dimostrazione.
La condizione 2 e la 3 implicano entrambe la 1, vista la completezza di μ. Per mostrare le altre implicazioni basterà considerare insiemi di misura finita e, nel caso generale, procedere come nel Teorema di approssimazione con aperti e compatti: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisteranno un aperto A_n e un compatto K_n tali che $K_n \subset E \subset A_n$ e $\mu(A_n) - \dfrac{1}{n} \leq \mu(E) \leq \mu(K_n) + \dfrac{1}{n}$, dunque sarà sufficiente porre

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad N := A \setminus E, \qquad M := E \setminus B;$$

a meno di considerare $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_N$ al posto di A_N e $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ al posto di K_N, possiamo supporre che A sia un'intersezione decrescente e B sia un'unione crescente, ed essendo per monotonia $\mu(K_n) \leq \mu(E) \leq \mu(A_n)$ otteniamo

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B),$$

quindi $\mu(N) = \mu(A) - \mu(E) = 0$ e $\mu(M) = \mu(E) - \mu(B) = 0$. $\square$

Lezioni 13-14 del 07/10/2024

Corollario.
Inoltre, se $E \subset \mathbb{R}$ è misurabile e ha misura $\mu(E) < \infty$, allora esiste un'unione finita A di intervalli aperti tale che $\mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

Dimostrazione.
Fissato $\varepsilon > 0$, dal Teorema di approssimazione con aperti e compatti esisterà un aperto $B \supset E$ tale che $\mu(B) \leq \mu(E)+\varepsilon$; scrivendo $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ come unione di intervalli aperti, dalla formula dell'unione crescente avremo $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \underset{N\to\infty}{\to} \mu(B)$, dunque esisterà N tale che $\mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n\right) < \varepsilon$ e quindi $A := \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ verifica

$$\begin{aligned} \mu(E \setminus A) &\leq \mu(B \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n\right) < \varepsilon \\ \mu(A \setminus E) &\leq \mu(B \setminus E) = \mu(B) - \mu(E) < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui $\mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) < 2\varepsilon$. □

Concentriamoci ora sulla misura di Lebesgue, la più importante del corso, quella di Lebesgue, che formalizza in modo rigoroso l'idea di misura 1-dimensionale.

Proposizione.
Se $E \in \mathcal{L}$, allora per $t \in \mathbb{R}$ sono Lebesgue misurabili anche gli insiemi

$$E + t := \{x + t : x \in E\}, \qquad tE := \{tx : x \in E\},$$

e misurano rispettivamente $m(E + t) = m(E)$ e $m(tE) = |t|m(E)$.

Esempio.
L'insieme di Vitali N definito all'inizio del corso non è Lebesgue misurabile, in quanto la misura di Lebesgue non è numerabilmente additiva sugli insiemi N_q definito attraverso N con traslazioni e intersezioni. Ripetendo la costruzione dell'insieme di Vitali, ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ di misura di Lebesgue $m(E) > 0$ positiva contiene un insieme non misurabile, definito prendendo un unico rappresentante di ciascuna classe rispetto alla relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione della proposizione.
Poiché la famiglia degli intervalli aperti è invariante per traslazioni e dilatazioni, lo è anche la σ-algebra che questa famiglia genera e cioè $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; inoltre, se $m(E) = 0$ allora anche $m(E+t)$ e $m(tE) = 0$. Poiché, dal corollario precedente, ogni $E \in \mathcal{L}$ è unione di un boreliano e di un insieme di misura nulla, concludiamo che anche la famiglia dei Lebesgue misurabili è invariante per traslazioni e dilatazioni.
Infine, se E è un unione finita di intervalli semi-aperti allora $m(E + t) = m(E)$ e $m(tE) = |t|m(E)$, e dal Teorema di estensione di misure l'uguaglianza continuerà a valere su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; poiché ciò è vero anche per gli insiemi di misura nulla, caso in cui tutte queste quantità sono zero, concludiamo che l'uguaglianza è valida su tutta la famiglia $\mathcal{L}$. □

Concludiamo il discorso introducendo un sottoinsieme della retta reale con delle proprietà curiose, soprattutto per quanto riguarda il confronto tra il punto di vista della teoria della misura e quello topologico.

Definizione.
*L'**insieme di Cantor** è il sottoinsieme di* $[0,1]$ *dei punti che hanno un'espansione in base tre* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ *con* $a_n \in \{0,1,2\}$ *dove non appare mai la cifra* $a_n = 1$ *per nessun* n.
Equivalentemente, C *può essere costruito ricorsivamente rimuovendo da* $[0,1]$ *l'intervallo aperto centrale che misura un terzo e cioè* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, *poi rimuovendo da ciascun intervallo rimanente l'intervallo aperto centrale che misura un terzo e cioè rispettivamente* $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ *e* $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, *e a ogni passo rimuovendo allo stesso modo un intervallo aperto centrale da ciascun intervallo rimanente.*

Proposizione.
L'insieme di Cantor C *ha le seguenti proprietà:*

1. C *è un compatto non vuoto;*
2. C *ha interno vuoto;*
3. C *non ha punti isolati, cioè ogni intorno di un suo qualsiasi punto contiene altri punti di* C*;*
4. $m(C) = 0$*;*
5. C *ha la cardinalità del continuo.*

Dimostrazione.

1. L'insieme C_n ottenuto dopo l'n-esima rimozione di intervalli è chiuso, dunque $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ è chiuso; essendo anche limitato, è compatto, ed è non vuoto perché ad esempio $0 \in C$.
2. Se C non avesse interno vuoto, allora conterrebbe un intervallo aperto (a,b) con $b > a$, dunque $(a,b) \subset C_n$ e in particolare sarebbe contenuto in uno degli intervalli che formano C_n, per ogni n; ognuno di questi intervalli però misura $\frac{1}{3^n}$, quindi otterremmo $b - a = m((a,b)) \leq \frac{1}{3^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che è assurdo.
3. Fissati $x \in C$ e $\varepsilon > 0$, sarà sufficiente trovare $y \in C$ tale che $0 < |x-y| < \varepsilon$. Scegliendo n tale che $\varepsilon > \frac{1}{3^n}$, C_n sarà unione di intervalli di lunghezza inferiore a ε e C_{n+1} conterrà un intervallo I che non contiene x e che dista da x meno di ε; essendo $I \cap C$ non vuoto, in quanto ottenuto riscalando C, conterrà un $y \neq x$ tale che $|x-y| < \varepsilon$.
4. Scrivendo C come unione decrescente dei C_n, i quali hanno misura pari a $\frac{2}{3}$ di C_{n-1}, avremo $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$
5. Utilizzando la scrittura in base 3, possiamo scrivere ogni $x \in C$ come $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0,2\}$ in modo unico. Dunque, la mappa
$$f : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a_n}{2}}{2^n}$$
è una mappa suriettiva tra C e $[0,1]$, rappresentato in base due; C ha quindi la stessa cardinalità di $[0,1]$ cioè la cardinalità del continuo.

$\square$

Dopo aver imparato a misurare opportune classi di insiemi, vogliamo definire l'integrale di una funzione rispetto a una misura, formalizzando rigorosamente le idee intuitive. Prima di tutto però chiariamo qual è la classe di funzioni che ci interesserà integrare, un po' come abbiamo già fatto per gli insiemi misurabili.

Definizione.
*Data una σ-algebra $\mathcal{M}$ su X, una funzione $f : X \to \mathbb{R}^N$ si dice $\mathcal{M}$-**misurabile** se la preimmagine di ogni boreliano di $\mathbb{R}^N$ è $\mathcal{M}$-misurabile, cioè $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$.*
*Se X è uno spazio metrico, una funzione $f : X \to \mathbb{R}^N$ si dice **Borel misurabile** se è $\mathcal{B}_X$-misurabile.*
*Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ si dice **Lebesgue misurabile** se è $\mathcal{L}$-misurabile.*

Osservazione.
$f : X \to \mathbb{R}^N$ è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{E}$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tale che $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$; in particolare, f è misurabile se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^N$ e, se $N = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Lezioni 15-16 del 08/10/2024

Osservazione.

1. *Se $f : X \to \mathbb{R}^N$ è $\mathcal{M}$-misurabile e $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è Borel misurabile, allora anche $g \circ f : X \to \mathbb{R}^M$ è $\mathcal{M}$-misurabile.*

2. *Se $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è continua allora è anche Borel misurabile, e dunque $g \circ f : X \to \mathbb{R}^M$ è $\mathcal{M}$-misurabile per ogni $f : X \to \mathbb{R}^N$ che sia $\mathcal{M}$-misurabile; dunque, se f è misurabile sono misurabili anche le seguenti funzioni:*

$$|f|, \qquad f^+, \qquad f^-, \qquad f^n \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

3. *Se f è $\mathcal{M}$-misurabile e $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ allora f è anche $\mathcal{N}$-misurabile; dunque, ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ Borel misurabile, e in particolare ogni f continua, è anche Lebesgue misurabile.*

Esempio.

1. *Se $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, tutte le funzioni sono misurabili perché tutti gli insiemi sono misurabili.*

2. *La funzione caratteristica di un insieme $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in E \\ 0 & se\ x \notin E \end{cases}$ è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se $E \in \mathcal{M}$.*

3. *La funzione* $\operatorname{segno}(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$ *è Borel misurabile, e dunque Lebesgue misurabile, pur non essendo continua; dunque, se $f : X \to \mathbb{R}$ è misurabile, è misurabile anche* $\operatorname{segno}(f(x))$.

Proposizione.
Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono $\mathcal{M}$-misurabili, anche $af + bg$ e fg sono misurabili per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; se $g(x) \neq 0$ per ogni x allora anche $\dfrac{f}{g}$ è misurabile.

Dimostrazione.
Definiamo $F : X \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come $F(x) = (f(x), g(x))$ e $G(s,t) = st$, in modo che $fg = G \circ F$. Poiché G è continua, per verificare la misurabilità di F sarà sufficiente dimostrare che $F^{-1}(A \times B) \in \mathcal{M}$ per ogni $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, perché come abbiamo visto questi rettangoli generano $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$; essendo però $F^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$, otteniamo che F è misurabile. Dunque, poiché la composizione di una funzione continua con una misurabile è a sua volta misurabile, deduciamo la misurabilità di $G \circ F$, cioè di fg.
Definendo $G(s,t) = as + bt$ si dimostra allo stesso modo la misurabilità di $af + bg$ e con $G(s,t) = \dfrac{s}{t}$ si procede per il quoziente. $\square$

Sarà spesso utile considerare funzioni che possano assumere anche valori infiniti. Estendiamo dunque in modo naturale il concetto di misurabilità anche a queste funzioni.

Definizione.
Un insieme boreliano sulla retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è un insieme boreliano di $\mathbb{R}$ oppure un insieme ottenuto aggiungendo a un boreliano di $\mathbb{R}$ uno o entrambi i punti all'infinito, dunque la σ-algebra di Borel su $\overline{\mathbb{R}}$ è data da:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} := \left\{ E \subset \overline{\mathbb{R}} : \ E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

*Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice $\mathcal{M}$-**misurabile** se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.*

Osservazione.
Per la composizione di funzioni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valgono le stesse proprietà descritte in precedenza per la funzioni a valori reali.

Proposizione.
Data una successione di funzioni misurabili $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sono misurabili le seguenti funzioni:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Inoltre, il massimo $\max\{f,g\}$ e il minimo $\min\{f,g\}$ di due funzioni misurabili f,g sono ancora funzioni misurabili e, se per ogni $x \in X$ esiste il limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ di una successione $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ di funzioni misurabili, allora f è una funzione misurabile.

Dimostrazione.
La funzione $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ verifica $g^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty,a])$, ed essendo $f_n^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ allora anche $g^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e cioè, poiché le semirette $[-\infty,a]$ generano $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, g è misurabile. Analogamente, $h := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ è misurabile in quanto $h^{-1}([a,\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a,\infty])$.
Ragionando allo stesso modo si deduce la misurabilità di $g_n := \sup_{m\geq n} f_m$ e $h_n := \inf_{m\geq n} f_m$ e quindi anche di $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$ e $\liminf_{n\to\infty} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n$. □

Introduciamo ora una classe di funzioni elementari, con cui successivamente inizieremo a costruire la teoria dell'integrazione.

Definizione.
Una funzione $\phi : X \to \mathbb{R}$ si dice ***semplice*** *se è misurabile e la sua immagine è un insieme finito, ovvero:*

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n} \qquad \text{per opportuni } c_1,\dots,c_N \in \mathbb{R},\ E_1,\dots,E_N \in \mathcal{M}.$$

Osservazione.
La rappresentazione $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ non è unica in assoluto, ma è unica se supponiamo gli E_n disgiunti e c_n tutti diversi: data l'immagine $\{c_1,\dots,c_N\}$ di ϕ basta prendere $E_n = \{x : \phi(x) = c_n\}$, escluso eventualmente n per cui $c_n = 0$.

Teorema (di approssimazione con funzioni semplici)**.**
Data $f : X \to [0,\infty]$ misurabile esiste una successione $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni semplici tali che $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq \phi_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ puntualmente e uniformemente su ogni insieme in cui f è limitata.

Dimostrazione.
Le funzioni definite, per $n \in \mathbb{N}$, come

$$\phi_n(x) := \begin{cases} \dfrac{m}{2^n} & \text{se } \dfrac{m}{2^n} \leq x < \dfrac{m}{2^{n+1}} \text{ per qualche } m = 0,\dots,2^{2n}-1 \\ 2^n & \text{se } f(x) \geq 2^n \end{cases}$$

sono misurabili, e dunque semplici, per la misurabilità di f; inoltre, si verifica facilmente che le ϕ_n sono crescenti e che se $f(x) \leq 2^n$ allora $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$, il che dimostra la convergenza puntuale e uniforme. □

Lezioni 17-18 del 10/10/2024

Studiamo ora alcune proprietà particolari di una funzione definita utilizzando l'insieme di Cantor e che ne eredita alcune peculiarità.

Definizione.
*La **funzione di Cantor** è la funzione $F : [0,1] \to [0,1]$ definita, per $x \in C$, come la mappa tra l'insieme di Cantor C e $[0,1]$ ed estesa in modo costante a ogni intervallo aperto di $[0,1] \setminus C$; equivalentemente, F è il limite delle funzioni F_n definite come lineari a tratti con pendenza $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ su ogni intervallo di $[0,1] \setminus C_n$ e costanti su C_n.*

Proposizione.
Se F è la funzione di Cantor e $G : [0,1] \to [0,2]$ è definita come $G(x) = x + F(x)$, allora:

1. *G è strettamente crescente e suriettiva;*
2. *Se C è l'insieme di Cantor allora $m(G(C)) = 1$;*
3. *Se $N \subset G(C)$ non è Lebesgue misurabile allora $G^{-1}(N)$ è Lebesgue misurabile ma <u>non</u> Borel misurabile;*
4. *G^{-1} è continua, $\chi_{G^{-1}(N)}$ è Lebesgue misurabile ma $\chi_{G^{-1}(N)} \circ G^{-1}$ <u>non</u> è Lebesgue misurabile.*

Dimostrazione.

1. G è strettamente crescente perché $x \mapsto x$ è strettamente crescente e $x \mapsto F(x)$ è crescente; inoltre, poiché $G(0) = 0$ e $G(1) = 2$, allora $G([0,1]) = [0,2]$.

2. Scrivendo $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ con I_n intervalli aperti disgiunti, F sarà costante su ciascun I_n e dunque se $x \in I_n$ allora $G(x) = x + c_n$ per qualche c_n; quindi G preserva la misura degli I_n e, per additività, anche di $[0,1] \setminus C$, pertanto:
$$m(G(C)) = m([0,2]) - m(G([0,1] \setminus C)) = 2 - 1 = 1.$$

3. Anzitutto, un $N \subset G(C)$ non misurabile esiste perché $m(G(N)) > 0$, grazie a una osservazione precedente. $G^{-1}(N)$ è Lebesgue misurabile in quanto ha misura nulla, essendo $m\left(G^{-1}(N)\right) \leq m\left(G^{-1}(G(C))\right) = m(C) = 0$; del resto $G^{-1}(N)$ non può essere boreliano perché altrimenti N, che è la preimmagine di $G^{-1}(N)$ rispetto alla funzione continua G^{-1}, sarebbe Lebesgue misurabile.

4. G^{-1} è continua in quanto inversa di una funzione continua invertibile e $\chi_{G^{-1}(N)}$ è Lebesgue misurabile in quanto funzione caratteristica di un insieme Lebesgue misurabile; tuttavia $\chi_{G^{-1}(N)} \circ G^{-1} = \chi_N$ non è Lebesgue misurabile perché N non è Lebesgue misurabile.

□

Iniziamo ora a definire l'integrale di una funzione, partendo dalle funzioni semplici, in cui associamo semplicemente a ogni insieme la sua misura. Estenderemo poi il concetto a qualsiasi funzione positiva misurabile e ad un'ampia classe di funzioni misurabili di segno qualunque.

Definizione.
*Dato uno spazio misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, l'**integrale** di una funzione semplice positiva $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$, con $c_n \geq 0$, rispetto a μ è dato da*
$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{n=1}^{N} c_n \mu(E_n).$$

Dato $E \in \mathcal{M}$, l'integrale di ϕ su E rispetto a μ è dato da

$$\int_E \phi \mathrm{d}\mu := \int \phi \chi_E \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{N} c_n \mu(E_n \cap E).$$

Quando ϕ è espressa in modo esplicito rispetto alla variabile x, scriveremo $\int \phi(x)\mathrm{d}\mu(x)$ (rispettivamente $\int_E \phi(x)\mathrm{d}\mu(x)$) per intendere $\int \phi \mathrm{d}\mu$ (risp. $\int_E \phi \mathrm{d}\mu$). Quando non c'è rischio di ambiguità riguardo la misura, scriveremo semplicemente $\int \phi$ (risp. $\int_E \phi$).

Osservazione.
La definizione di integrale non dipende dalla scrittura $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ della funzione semplice, purché si definisca $c_n \mu(E_n) = 0$ se $c_n = 0$ e $\mu(E_n) = \infty$.

Esempio.
Se $\mu = \#$ è la misura che conta, allora per ogni $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ abbiamo $\int \phi \mathrm{d}\# = \sum_{n=1}^{N} c_n \#(E_n)$ e, supponendo $c_n \neq 0$, l'integrale sarà finito se e solo se gli E_n sono tutti insiemi finiti, cioè se e solo se $\phi(x) \neq 0$ solo per un numero finito di x; in questo caso, se $x_1, \dots, x_M$ sono i valori per cui ϕ non si annulla, avremo $\int \phi \mathrm{d}\# = \sum_{m=1}^{M} \phi(x_m)$.

Proposizione.
Date due funzioni semplici positive ϕ, ψ, valgono le seguenti:

1. $\int c\phi = c \int \phi$ *per ogni* $c \geq 0$;
2. $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$;
3. *Se* $\phi \leq \psi$ *allora* $\int \phi \leq \int \psi$;
4. *Se* $E \subset F$ *allora* $\int_E \phi \leq \int_F \phi$;
5. $\phi\mu := A \mapsto \int_A \phi$ *è una misura su* $\mathcal{M}$.

Dimostrazione.

1. Segue dalla definizione.
2. Scrivendo $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ e $\psi = \sum_{m=1}^{M} d_m \chi_{F_m}$, avremo $\phi = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} c_n \chi_{E_n \cap F_m}$ e $\psi = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} d_m \chi_{E_n \cap F_m}$, con $c_0 = d_0 = 0$ e $E_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n$, $F_0 = X \setminus \bigcup_{m=1}^{M} F_m$; dunque $\phi + \psi = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} (c_n + d_n) \chi_{E_n \cap F_m}$ e pertanto:
$$\int \phi + \int \psi = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} c_n \mu(E_n \cap F_m) + \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} d_m \mu(E_n \cap F_m) = \int (\phi + \psi).$$
3. Con le notazioni del punto precedente, $\phi \leq \psi$ implica $c_n \leq d_m$ ogni volta che $E_n \cap F_m \neq \emptyset$, dunque
$$\int \phi = \sum_{n,m} c_n \mu(E_n \cap F_m) \leq \sum_{n,m} d_m \mu(E_n \cap F_m) = \int \psi.$$

4. Segue dal punto precedente in quanto $\phi\chi_E \leq \phi\chi_F$.

5. Segue dal fatto che $\phi\mu = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \mu|_{E_n}$ è una combinazione lineare con coefficienti positivi c_n delle misure $\mu|_{E_n}$.

□

Definizione.
*L'**integrale** di una funzione appartenente alla famiglia di funzioni misurabili positive*

$$\mathcal{L}^+ = \{f : X \to [0, \infty] : \mathcal{M}\text{- } \textit{misurabile}\}$$

è dato da

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int \phi \mathrm{d}\mu : \phi \ \textit{semplice}, \ 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

L'integrale di $f \in \mathcal{L}^+$ su E è dato da

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int f \chi_E \mathrm{d}\mu.$$

Osservazione.

1. *Se f è semplice allora le due definizioni coincidono, perché f stessa è una delle funzioni semplici tra cui viene calcolato l'estremo superiore; questo giustifica l'utilizzo delle stessa notazione e terminologia.*

2. *Per $f \in \mathcal{L}^+$ qualsiasi continuano a valere alcune proprietà valide per l'integrale di funzioni semplici, e in particolare:*

$$\int cf = c \int f \, \forall c \geq 0, \qquad f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g, \qquad E \subset F \Rightarrow \int_E f \leq \int_F f.$$

Esempio.
Se $\mu = \#$ è la misura che conta su un qualsiasi insieme X, $f : X \to [0, \infty]$ avrà integrale finito se e solo se è diversa da zero solo su un insieme numerabile, e in questo caso, chiamando $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ l'insieme in cui f non si annulla, avremo $\displaystyle\int f \mathrm{d}\# = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$, come segue approssimando f con le funzioni semplici $\phi_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\chi_{\{x_n\}}$; se invece l'insieme $\{x : f(x) > 0\}$ non è numerabile, scrivendo $\{x : f(x) > 0\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, uno di questi ultimi insiemi dovrà essere più che numerabile, e in particolare infinito, per qualche n_0, dunque

$$\int f \mathrm{d}\# \geq \int_{\left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n_0}\right\}} f \mathrm{d}\# \geq \int_{\left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n_0}\right\}} \frac{1}{n_0} \mathrm{d}\# = \frac{1}{n_0} \# \left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n_0}\right\} = \infty.$$

Lezioni 19-20 del 14/10/2024

La definizione che abbiamo dato di integrale è sufficientemente maneggevole da fornire un teorema di convergenza semplice ma di fondamentale importanza.

Teorema (della convergenza monotona).
Se una successione $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{L}^+$ è puntualmente monotona crescente, cioè $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}, x \in X$, allora
$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$
In particolare, data $f \in \mathcal{L}^+$, la successione $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ di funzioni semplici data dal Teorema di approssimazione con funzioni semplici verifica $\displaystyle\int \phi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int f$.

Dimostrazione del Teorema della convergenza monotona.
Anzitutto, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste per ogni x grazie alla monotonia di f, e poiché la misurabilità si preserva passando al limite abbiamo anche $f \in \mathcal{L}^+$; anche il limite di $\displaystyle\int f_n$ esiste perché è una successione crescente. Inoltre, poiché $f_n \le f$ puntualmente, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \le \int f$.
Per mostrare la disuguaglianza opposta, fissiamo $c \in (0,1)$ e ϕ semplice che verifichi $0 \le \phi \le f$ e definiamo $E_n := \{x \in X : f_n(x) \ge c\phi(x)\}$, che verificherà
$$\int f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge \int_{E_n} c\phi = c\int_{E_n} \phi.$$
Gli E_n sono una famiglia crescente la cui unione è X, perché essendo $f > c\phi$ allora per ogni x fissato dovrò avere $f_n(x) > c\phi(x)$ per qualche n. Applicando la formula dell'unione crescente alla misura $E \to \displaystyle\int_E \phi$ otteniamo $\displaystyle\int_{E_n} \phi \underset{n\to\infty}{\to} \int \phi$ e dunque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \ge c\int \phi$; passando all'estremo superiore tra i $c \in (0,1)$ ottengo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \ge \int \phi$ per ogni funzione semplice positiva $\phi \le f$, quindi per definizione di integrale concludiamo che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \ge \int f$. □

Esempio.
$$\sum_{k=0}^\infty \left(n\sqrt{n^2 + \frac{1}{2^k}} - n^2 \right) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$
Infatti, possiamo scrivere $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \left(n\sqrt{n^2 + \frac{1}{2^k}} - n^2 \right) = \int_{\mathbb{N}} f_n(k) \mathrm{d}\#(k)$ *con*
$$f_n(k) = n\sqrt{n^2 + \frac{1}{2^k}} - n^2 = \frac{\frac{1}{2^k}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2 2^k}} + 1} \underset{n\to\infty}{\nearrow} \frac{1}{2^{k+1}}$$
e dunque
$$\sum_{k=0}^\infty f_n(k) \underset{n\to\infty}{\to} \int \frac{1}{2^{k+1}} \mathrm{d}\#(k) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{k+1}} = 1;$$
allo stesso modo si può dimostrare che
$$\sum_{k=0}^\infty \left(n\sqrt{n^2 + a^k} - n^2 \right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2(1-a)} \qquad \forall\, a \in [0,1).$$

Corollario.
Data una successione $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{L}^+$, finita o infinita, vale l'uguaglianza
$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n.$$

Inoltre, $f\mu : E \mapsto \int_E f$ è una misura per ogni $f \in \mathcal{L}^+$.

Dimostrazione.
Mostriamo anzitutto il risultato per le somme finite, per cui è sufficiente considerare il caso di due funzioni e iterare: date f_1, f_2, per il Teorema di approssimazione con funzioni semplici esistono due successioni di funzioni semplici $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty, \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ che convergono dal basso rispettivamente a f_1, f_2; $\phi_n + \psi_n$ convergerà dal basso a $f_1 + f_2$ e dunque applicando alle tre successioni il Teorema della convergenza monotona e utilizzando l'additività dell'integrale delle funzioni semplici otteniamo

$$\int (f_1 + f_2) = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \int f_1 + \int f_2.$$

Nel caso di una successione infinita di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, abbiamo appena visto che $\int \sum_{n=1}^N f_n = \sum_{n=1}^N \int f_n$ per ogni N, dunque possiamo applicare a quest'ultima successione di funzioni il Teorema della convergenza monotona:

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n = \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N f_n = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^N f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int f_n = \sum_{n=1}^\infty \int f_n.$$

Infine, presa un unione disgiunta di misurabili $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, applicando quanto appena visto a $f_n = f\chi_{E_n}$ otteniamo

$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f = \int f\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} = \int \sum_{n=1}^\infty f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^\infty \int f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f,$$

dunque $E \mapsto \int_E f$ è una misura. $\square$

Lemma (di Fatou).
Data una successione $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{L}^+$ vale

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Osservazione.
In generale, potrebbe valere la disuguaglianza stretta: prendiamo ad esempio la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e $f_n = \chi_{[n,n+1)}$: abbiamo $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ puntualmente, e dunque $\int \liminf_{n\to\infty} f_n = 0$, ma $\int f_n = 1$ per ogni n; la stessa conclusione si ottiene con $f_n = n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ oppure $f = \frac{1}{n}\chi_{[0,n)}$. Questi stessi esempi dimostrano che la sola convergenza puntuale non è sufficiente per "scambiare" limite e integrale.
Un altro esempio in cui vale la disuguaglianza stretta nel Lemma di Fatou, ma in cui non esiste il limite puntuale è dato da $f_n = \begin{cases} \chi_{[0,1]} & n \text{ pari} \\ \chi_{[1,2]} & n \text{ dispari} \end{cases}$, in cui $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni x ma $\int f_n = 0$.

Dimostrazione del Lemma di Fatou.
Le funzioni $g_n := \inf_{m\ge n} f_m$ verificano $f_n \ge g_n$ e inoltre $g_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \liminf_{n\to\infty} f_n$, dunque applicando il Teorema della convergenza monotona a g_n si ottiene

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \ge \liminf_{n\to\infty} \int g_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \int \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

$\square$

Sarà spesso conveniente, nel calcolo degli integrali, poter tralasciare gli insiemi che hanno misura nulla.

Definizione.
Dato uno spazio misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, una proprietà sui punti di X vale ***quasi ovunque*** *o per* ***quasi ogni*** *$x \in X$, in breve* ***q.o.***, *se è vera per tutti i punti di X ad eccezione di un insieme di misura nulla, cioè se esiste un insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ e la proprietà è vera per ogni $x \in X \setminus E$.*

Proposizione.
Data $f \in \mathcal{L}^+$, vale $\displaystyle\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o..

Dimostrazione.
Se una funzione semplice $\phi = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$, con $c_n \neq 0$, verifica $\phi = 0$ q.o., allora necessariamente $\mu(E_n) = 0$ per $n = 1, \ldots, N$, e dunque $\displaystyle\int \phi = 0$; se in generale $f \in \mathcal{L}^+$ è nulla q.o., allora $\phi = 0$ q.o. per ogni funzione semplice ϕ tale che $0 \leq \phi \leq f$, e quindi $\displaystyle\int f = 0$. Viceversa, ponendo $E_n = \left\{x : f(x) \geq \dfrac{1}{n}\right\}$ per $n \in \mathbb{N}$, avremo $f \geq \dfrac{1}{n}\chi_{E_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque $\displaystyle\int f \geq \frac{1}{n}\mu(E_n)$ e quindi se $\displaystyle\int f = 0$ dev'essere $\mu(E_n) = 0$ per ogni n. Essendo però $\{x : f(x) > 0\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con unione crescente, allora $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$, cioè $f = 0$ q.o.. □

Corollario.

1. *Se $f_n \in \mathcal{L}^+$ e $f_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f$ q.o., allora $\displaystyle\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*
2. *Se $f_n \to f$ q.o. allora $\displaystyle\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$.*

Dimostrazione.

1. Se E è un insieme tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f$ puntualmente su E^c, allora applicando il Teorema della convergenza monotona a $f_n\chi_{E^c}$ e la proposizione precedente a $f\chi_{E^c}, f_n\chi_{E^c}$ si ottiene
$$\int f = \int f\chi_{E^c} + \int f\chi_E = \int f\chi_{E^c} = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$
2. Segue applicando il Lemma di Fatou a $f_n\chi_{E^c}$, con E tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \to f$ su E^c.

□

Lezioni 21-22 del 15/10/2024

Per poter integrare funzioni di segno qualunque, oltre alla misurabilità richiederemo una condizione extra per evitare infiniti di segno opposto che vadano in conflitto.

Definizione.
Una funzione misurabile f si dice ***integrabile*** *se le funzioni positive f^+ e f^- hanno entrambe integrale finito.*
*L'**integrale** di una funzione integrabile f è definito come*

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

Osservazione.
Una funzione misurabile è integrabile se e solo se $|f| = f^+ + f^-$ ha integrale finito.

Proposizione.
Date due funzioni f, g integrabili, valgono le seguenti:

1. *$af + bg$ è integrabile per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int (af + bg) = a \int f + b \int g$;*
2. *Se $f \leq g$ q.o. allora $\displaystyle\int f \leq \int g$;*
3. *$\displaystyle\left|\int f\right| \leq \int |f|$ e l'uguaglianza vale se e solo se f ha segno costante q.o.;*
4. *$\{x : |f(x)| = \infty\}$ ha misura nulla e $\{x : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito;*
5. *$\displaystyle\int_E f = \int_E g$ per ogni misurabile E se e solo se $\displaystyle\int |f - g| = 0$ se e solo se $f = g$ q.o..*

Dimostrazione.

1. $af+bg$ è integrabile perché $|af+bg| \leq |a||f|+|b||g|$ e quindi $af+bg \in \mathcal{L}^+$; poi, $\displaystyle\int af = a \int f$ segue dalla validità della stessa proprietà su $\mathcal{L}^+$; l'additività segue spezzando $f + g, f, g$ in parti positive e negative scrivendo $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \in \mathcal{L}^+$ e applicando l'additività dell'integrale di funzioni positive:

$$\begin{aligned} \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- &= \int \left((f+g)^+ + f^- + g^-\right) \\ &= \int \left((f+g)^- + f^+ + g^+\right) \\ &= \int f^+ + \int g^+ + \int (f+g)^-, \end{aligned}$$

   da cui segue

$$\int (f+g) = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^- - \int g^+ = \int f + \int g.$$

2. Segue dalla monotonia dell'integrale su $\mathcal{L}^+$ e dal fatto che se $f \leq g$ allora $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$.
3. Segue scrivendo

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|;$$

   l'uguaglianza varrà se e solo se $\displaystyle\int f^+$ e $\displaystyle\int f^-$ hanno segno opposto, cioè se e solo se uno dei due è nullo, che equivale a dire che f^+ oppure f^- è nulla q.o..

4. Se $E := \{x : |f(x)| = \infty\}$ avesse misura $\delta > 0$, allora $|f| \geq \infty\chi_E$, dunque $\displaystyle\int |f| \geq \infty \cdot \delta = \infty$, dunque f non sarebbe integrabile; per la seconda affermazione, è sufficiente scrivere $\{x : f(x) \neq 0\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n := \left\{x : |f(x)| \geq \dfrac{1}{n}\right\}$: se un qualche E_{n_0} avesse misura infinita, allora otterremmo l'assurdo $\displaystyle\int |f| \geq \int |f|\chi_{E_{n_0}} \geq \mu(E_{n_0})\frac{1}{n_0} = \infty$.

5. La seconda equivalenza si ottiene applicando a $|f - g|$ una proprietà delle funzioni integrabili; se $\displaystyle\int |f - g| = 0$ allora dalla 3 otteniamo

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| \leq \int \chi_E |f - g| \leq \int |f - g| = 0;$$

infine, se $\displaystyle\int_E f = \int_E g$ per ogni E, scegliendo $E = \{x : f(x) - g(x) > 0\}$ otteniamo $\displaystyle\int (f - g)^+ = \int_{\{x: f(x) - g(x) > 0\}} (f - g) = 0$ e analogamente $\displaystyle\int (f - g)^- = 0$, da cui $\displaystyle\int |f - g| = 0$.

□

Mostriamo ora un altro teorema di passaggio al limite sotto integrale, valido stavolta per funzioni di segno qualunque. Anche questo, al pari del Teorema della convergenza monotona, è piuttosto semplice nell'enunciato ma ha moltissime applicazioni.

Teorema (della convergenza dominata)**.**
Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni integrabili tali che:

1. $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ q.o.;

2. $|f_n| \leq g$ per ogni n, per qualche g integrabile.

Allora f è integrabile e $\displaystyle\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Osservazione.
Sotto le stesse ipotesi, è possibile applicare il teorema a $|f_n - f|$, che verifica $|f_n - f| \leq 2g$ con $2g$ integrabile, e concludere anche che $\displaystyle\int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Dimostrazione del Teorema della convergenza dominata.
Essendo limite di funzioni misurabili, f è misurabile, a meno di ri-definirla su un insieme di misura nulla, ed essendo $|f| \leq |g|$ allora f è anche integrabile. Applicando poi il Lemma di Fatou alle successioni $g \pm f_n \in \mathcal{L}^+$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int g + \int f &= \int (g + f) = \int \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n) = \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n, \\
\int g - \int f &= \int (g - f) = \int \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n;
\end{aligned}$$

cancellando $\displaystyle\int g$ da entrambe le formule si ottiene $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$, dunque dovrà essere $\displaystyle\int f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int f$. □

Corollario.
Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di funzioni misurabili tali che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge q.o. e

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Dimostrazione.
Applicando un corollario del Teorema della convergenza monotona a $|f_n|$ otteniamo che $\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ e dunque $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ è integrabile; dalla proposizione precedente, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|(x)$ sarà finita per q.o. x e per questi x avremo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente. Inoltre, poiché $\left| \sum_{n=1}^{N} f_n \right| \leq g$ per ogni N, il risultato segue applicando il Teorema della convergenza dominata a $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$. $\square$

Esempio.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(n\sqrt{n^2 + \frac{(-1)^k}{2^k}} - n^2 \right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{3}.$$

Infatti, è sufficiente scrivere, come in un esempio precedente, la somma come integrale rispetto alla misura che conta di

$$f_n(k) := n\sqrt{n^2 + \frac{(-1)^k}{2^k}} - n^2 = \frac{\frac{(-1)^k}{2^k}}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^k}{n^2 2^k}} + 1},$$

che converge puntualmente a $\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$ *per ogni* k *fissato; poiché inoltre* $|f_n(k)| \leq \frac{1}{2^k} := g(k)$*, che verifica* $\int_{\mathbb{N}} g(k) \mathrm{d}\#(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$*, allora si può applicare il Teorema della convergenza dominata ottenendo*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{3}.$$

Allo stesso modo si può dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(n\sqrt{n^2 + (-1)^k a^k} - n^2 \right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2(1+a)} \qquad \forall\, a \in [0,1).$$

Vediamo infine come si possono approssimare funzioni di segno qualunque con funzioni semplici, in un modo che permetta di passare al limite dentro al segno di integrale. Nel caso di misure di Lebesgue-Stieltjes, è possibile procedere in modo simile utilizzando funzioni continue.

Proposizione.
Data f *integrabile, esiste una successione* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni* <u>*semplici*</u> *tale che* $\int |\phi_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$*.*
Se poi μ *è una misura di Lebesgue-Stieltjes su* $\mathbb{R}$ *allora esiste una successione* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni* <u>*continue*</u> *tale che* $\int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$*.*

Dimostrazione.
Applicando il Teorema di approssimazione con funzioni semplici a f^+ e f^- troveremo due successioni $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni semplici positive tali che $\psi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f^+, \eta_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f^-$ puntualmente, dunque dal Teorema della convergenza monotona $\int \psi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int f^+, \int \eta_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int f^-$ e quindi $\phi_n := \psi_n - \eta_n$ sono funzioni semplici tali che

$$\int |\phi_n - f| = \int \left(\psi_n - f^+\right) + \int \left(\eta_n - f^-\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Per la seconda affermazione, è sufficiente dimostrare che ogni funzione semplice integrabile può essere approssimata da funzioni continue, che dovranno essere anch'esse integrabili; per linearità, basta ridursi al caso di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, ed è inoltre possibile considerare solo misurabili di misura finita perché se $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ allora $\mu(E_n) = \frac{1}{|c_n|} \int_{E_n} |\phi| \leq \frac{1}{|c_n|} \int |\phi| < \infty$. Grazie al Teorema di approssimazione con aperti e compatti, per ogni misurabile E esistono due successioni A_n di aperti e C_n di chiusi tali che $C_n \subset E \subset A_n$ tali che

$$\mu(A_n \setminus C_n) = \mu(A_n \setminus E) + \mu(E \setminus C_n) < \frac{1}{n},$$

dunque la funzione

$$f_n(x) := \frac{d(x, A_n^c)}{d(x, A_n^c) + d(x, C_n)}$$

coincide con χ_E sia su A_n^c che su C_n, mentre sul resto sono entrambe comprese tra 0 e 1, dunque

$$\int |f_n - \chi_E| \leq \mu(A_n \setminus_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

$\square$

Lezioni 23-24 del 17/10/2024

Vediamo infine un risultato fondamentale sugli integrali dipendenti da parametro, conseguenza del Teorema di convergenza monotona, che ha anche implicazioni pratiche per il calcolo di alcuni integrali di cui non si conoscono le primitive.

Teorema (di continuità e derivazione sotto integrale).
Sia $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R}$ è integrabile per ogni t fissato, sia

$$F(t) := \int_X f(x, t)\mathrm{d}\mu(x)$$

e sia $t_0 \in (a, b)$ fissato. Allora:

Continuità *Se $f(x, \cdot)$ è continua in t_0 per ogni x ed esiste g integrabile tale che $|f(x, t)| \le g(x)$ per ogni x e per t in un intorno di t_0, allora F è continua in t_0.*

Derivazione *Se $f(x, \cdot)$ è derivabile in t_0 per ogni x ed esiste h integrabile tale che $|\partial_t f(x, t)| \le h(x)$ per ogni x e per t in un intorno di t_0, allora F è differenziabile in t_0 e*

$$F'(t_0) := \int_X \partial_t f(x, t_0)\mathrm{d}\mu(x).$$

Osservazione.
Assumendo che $\partial_t f(\cdot, t)$ abbia una maggiorante integrabile otterremo che F è differenziabile, e dunque in particolare continua, senza dover supporre esplicitamente che anche f abbia una maggiorante integrabile. Del resto, se $|\partial_t f(x, t)| \le h(x)$ allora per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ avremo $|\partial_t f(\cdot, t)| \le |f(x, t_0)| + \delta h(x)$ e quest'ultima è una maggiorante integrabile.

Esempio.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\mathrm{d}x = \log t, \qquad \forall\, t > 0.$$

Infatti, possiamo applicare il Teorema di continuità e derivazione sotto integrale e otterremo continuità in quanto, per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $x \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\right| &\le \frac{|-x - (-tx)| \max_{\min\{x,tx\} \le s \le \max\{x,tx\}} |-e^{-s}|}{x} \\ &= |1 - t|e^{-\min\{x,tx\}} \\ &\le 1 + |t| \\ &\le 1 + t_0 + \delta\end{aligned}$$

mentre se $x > 1$ avremo

$$\left|\frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\right| \le \frac{e^{-x} + e^{-tx}}{x} \le \frac{e^{-x} + e^{-(t_0-\delta)x}}{x},$$

dunque, prendendo $\delta < t_0$, una maggiorante integrabile è $g(x) := \begin{cases} 1 + t_0 + \delta & \text{se } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{e^{-x} + e^{-(t_0-\delta)x}}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$;
quanto alla derivabilità, abbiamo

$$\left|\partial_t \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\right| = \left|e^{-tx}\right| \le e^{-(t_0-\delta)x} =: h(x),$$

dunque applicando il teorema otterremo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\int_0^\infty \partial_s \frac{e^{-x} - e^{-sx}}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \int_0^t \left(\int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \log t.$$

Dimostrazione del Teorema di continuità e derivazione sotto integrale.

Continuità Fissato t_0, per la continuità di f la successione $f_n := f(\cdot, t_n)$ convergerà puntualmente a $f(\cdot, t_0)$ per qualsiasi $t_n \to t_0$; inoltre, per n grande avremo $|t_n - t_0| \le \delta$ e dunque $|f_n| \le g$, dunque applicando il Teorema della convergenza dominata otterremo

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x, t_n) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x, t_0) \mathrm{d}\mu(x) = F(t_0),$$

cioè $F(t)$ è continua in t_0.

Derivazione Anzitutto, fissato t_0 possiamo scrivere $\partial_t f(x, t_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, con

$$h_n := \frac{f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t_0)}{t_n - t_0}$$

per una qualsiasi $t_n \to t_0$, il che dimostra la misurabilità di $\partial_t f(\cdot, t_0)$; dal Teorema del valor medio otteniamo che $|h_n| \le \sup_t |\partial_t f(\cdot, t)| \le h$, dunque si può applicare il Teorema della convergenza dominata a h_n ottenendo così:

$$F'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \partial_t f(x, t) \mathrm{d}\mu(x).$$

□

Vedremo ora varie nozioni della convergenza per successioni di funzioni misurabili e le confronteremo tra loro.

Definizione.
*Una successione di funzioni misurabili $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge in media** a una f misurabile se $\int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.*
*$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge in misura** a f se*

$$\mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Proposizione.
Data una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni misurabili, valgono le seguenti:

1. *Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente allora converge q.o., in misura e, se $\mu(X) < \infty$, allora $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in media;*
2. *Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in media allora $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in misura;*
3. *Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ q.o. e $\mu(X) < \infty$ allora $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in misura;*
4. *Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in misura allora esiste una sotto-successione f_{n_k} tale che $f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} f$ q.o..*

Esempio.

1. *La successione $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n)}$ converge a 0 uniformemente su $\mathbb{R}$ (e dunque puntualmente); converge anche in misura, perché $m(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \ge \varepsilon\}) = 0$ per $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ma non converge in media (rispetto alla misura di Lebesgue) perché $\int |f_n| \mathrm{d}m = 1$.*
2. *$f_n = \chi_{[n,n+1)}$ converge q.o. a 0 su $\mathbb{R}$ ma non converge in misura, perché $m(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \ge 1\}) = 1$, e dunque neanche in media; non converge neanche uniformemente perché $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = 1$.*

3. *$f_n = n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ converge a 0 q.o. su $[0,1]$, e dunque in misura, ma non converge in media, e dunque neanche uniformemente, perché $\displaystyle\int |f_n| = 1$.*

4. *Ponendo, per $n = 2^m + l$ con $0 \leq l \leq 2^m - 1$, $f_n = \chi_{\left[\frac{l}{2^m},\frac{l+1}{2^m}\right)}$, la successione converge a 0 su $[0,1]$ in media (e dunque in misura) perché $\displaystyle\int |f_n| = \frac{1}{2^m}$, ma non converge q.o. (e dunque neanche uniformemente) perché per ogni $x \in [0,1]$ esistono infiniti n per cui $f_n(x) = 0$ e infiniti n per cui $f_n(x) = 1$.*

Dimostrazione della proposizione.

1. Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ uniformemente, allora per ogni x vale $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup|f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$; inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo $\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} = \emptyset$ per n sufficientemente grande e dunque c'è convergenza in misura; infine, se $\mu(X) < \infty$, $\displaystyle\int |f_n - f| \leq \mu(X)\sup|f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

$\square$

Lezioni 25-26 del 21/10/2024

Dimostrazione della proposizione.

2. Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in media, allora per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} \varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

3. Scriviamo innanzi tutto

$$\begin{aligned}\left\{|f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{|f_n - f| < \frac{1}{k} \text{ definitivamente}\right\}\\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|f_n - f| < \frac{1}{k}, \forall\, m \geq n\right\}\\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{|f_m - f| < \frac{1}{k}\right\};\end{aligned}$$

essendo $f_n \to f$ q.o., l'insieme precedente ha misura piena e cioè $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{|f_m - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$. Dovremo quindi avere $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{|f_m - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$ per ogni k, e applicando la formula dell'unione decrescente (lecita perché $\mu(X) < \infty$) si otterrà $\mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{|f_m - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ per ogni k, dunque in particolare $\mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ per ogni k e cioè $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in misura.

4. Poiché $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in misura, per ogni k esisterà una successione n_k tale che $\mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ per $n \geq n_k$. Poiché $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1$, possiamo applicare la formula dell'intersezione decrescente e ottenere

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = \lim_{m\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 0;$$

del resto, se $x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\right\}$ allora per qualche m avremo $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ per $k \geq m$, e cioè $f_{n_k}(x) - f(x) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, in conclusione $f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} f$ q.o..

$\square$

Definizione.
Una successione di funzioni misurabili $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***converge quasi uniformemente*** *a una f misurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un misurabile E tale che $\mu(E) < \varepsilon$ e $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ su E^c.*

Osservazione.
Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente allora $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ quasi uniformemente, come segue prendendo $E = \emptyset$ nella definizione.

Esempio.
Tra gli esempi visti in precedenza, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n)}$ *converge a* 0 *quasi uniformemente, perché converge uniformemente; anche* $f_n = n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ *converge a zero quasi uniformemente, perché per ogni* $\varepsilon > 0$ $E := (0,\varepsilon)$ *verifica* $m(E) = \varepsilon$ *e* $f_n|_{[0,1]\setminus E} \equiv 0$ *per* n *grande. La successione* $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ *non converge quasi uniformemente perché* $m([n,n+1)) = 1$ *e* $\sup\limits_{[n,n+1)} |f_n| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ *e neanche* $f_{2^m+l} = \chi_{\left[\frac{l}{2^m},\frac{l+1}{2^m}\right)}$ *converge quasi uniformemente perché* $\sup\limits_{[0,1]\setminus E} |f_n| = 1$ *per ogni* $E \subsetneq [0,1]$.

Proposizione.
Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ *quasi uniformemente allora* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ *q.o. e in misura.*

Dimostrazione.
Se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ quasi uniformemente, per ogni $m \in \mathbb{N}$ scegliamo un misurabile E_m tale che $\mu(E_m) \le \frac{1}{m}$ e $\sup\limits_{X\setminus E_m} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$; allora, $E := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ avra misura $\mu(E) \le \mu(E_m) \le \frac{1}{m}$ per ogni m, e cioè $\mu(E) = 0$. Inoltre, per ogni $x \in E^c = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (E_m^c)$ avremo $x \in E_m^c$ per qualche m, dunque $|f_n(x) - f(x)| \le \sup\limits_{E_m^c} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque in particolare $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ per q.o. x.
Prendendo poi E_m come prima, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato avrò $\sup\limits_{E_m^c} |f_n - f| < \varepsilon$ per $n \ge N(m)$, ovvero $\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} \subset E_m$ e quindi $\mu(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) \le \mu(E_m) \le \frac{1}{m}$, cioè $\mu(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi c'è convergenza in misura. □

Teorema (di Egoroff)**.**
Data una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni misurabili tale che* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ *q.o., se* $\mu(X) < \infty$ *allora* f_n *converge quasi uniformemente.*
In particolare, le coincidenze q.o. e quasi uniforme coincidono sugli insiemi di misura finita.

Osservazione.
Se $\mu(X) = \infty$*, la convergenza q.o. non implica la convergenza quasi uniforme; infatti, la successione* $f_n = \chi_{[n,n+1)}$*, già incontrata precedente, converge q.o. ma uniformemente solo sui sottoinsiemi superiormente limitati di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione del Teorema di Egoroff.
Definiamo, per $n, k \in \mathbb{N}$,

$$E_{n,k} = \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k}\right\}.$$

Per ipotesi, $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_{n,k}\right) = 0$ per ogni k fissato, ed è un'intersezione decrescente in n, dunque avendo ipotizzato $\mu(X) < \infty$ possiamo applicare la formula dell'intersezione decrescente e otterremo $\mu(E_{n,k}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo n_k tale che $\mu(E_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ e definiamo $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k}$: avremo $\mu(E) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k,k}) < \varepsilon$ e inoltre, se $x \notin E$, avremo $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$ per $n \ge n_k$, e dunque $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente su E^c. □

Consideriamo ora un prodotto di due spazi misura e proviamo a definire in modo naturale una misura su questo spazio prodotto a partire dai due spazi base.

Definizione.
Dati due spazi misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, la ***misura prodotto*** *$\mu \times \nu$ è definita sulla σ-algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ come:*

$$(\mu \times \nu)(A_1 \times B_1 \cup \cdots \cup A_N \times B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\nu(B_n)$$

per ogni unione <u>disgiunta</u> di rettangoli $A_1 \times B_1 \cup \cdots \cup A_N \times B_N$, dando il valore 0 ad eventuali prodotti $0 \cdot \infty$ nella somma precedente, ed estendendo la misura con il Teorema di estensione di misure alla σ-algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ generata dall'algebra delle unioni finite di rettangoli.

Osservazione.

1. *$\mu \times \nu$ è finita se e solo se μ, ν sono entrambe finite, ed è σ-finita se e solo se μ, ν sono entrambe σ-finite.*

2. *In generale, anche se μ e ν sono entrambe complete, $\mu \times \nu$ <u>non</u> è completa: prendendo infatti $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{M}$ e $F \in \mathcal{N}$ con $\mu(F) = 0$ avremo $(\mu \times \nu)(E \times F) = 0$ ma $E \times F \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$; questo problema può essere risolto applicando a $\mu \times \nu$ il Teorema del completamento di misure.*

Lezioni 27-28 del 22/10/2024

Definizione.
Dati $E \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, la **x-*sezione*** *e la* **y-*sezione*** *di E sono date rispettivamente da*

$$E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \qquad E^y := \{x \in X : (x,y) \in E\};$$

La **x-*sezione*** *e la* **y-*sezione*** *di una funzione f definita su $X \times Y$ sono*

$$f_x(y) := f(x,y), \qquad f^y(x) := f(x,y).$$

Il seguente teorema, dall'enunciato forse prevedibile ma dalla dimostrazione non banale, fornisce uno strumento pratico essenziale per integrare su spazi prodotto.

Teorema (di Fubini-Tonelli)**.**
Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi di misura σ-finiti.

Tonelli *Se $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$, allora le sezioni di f*

$$f_x : y \mapsto f(x,y), \qquad f^y : x \mapsto f(x,y)$$

sono, rispettivamente, ν-misurabile per q.o. x e $\mu-$misurabile per q.o. y; inoltre,

$$x \to \int_Y f_x \mathrm{d}\nu, \qquad y \to \int f^y \mathrm{d}\mu$$

sono, rispettivamente, μ-misurabile e ν-misurabile e infine

$$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

In particolare, se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, allora le sezioni

$$E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \qquad E^y := \{x \in Y : (x,y) \in E\}$$

sono, rispettivamente, ν-misurabile per q.o. x e $\mu-$misurabile per q.o. y, le funzioni $x \mapsto \nu(E_x), y \mapsto \mu(E^y)$ sono rispettivamente μ-misurabile e ν-misurabile e

$$(\mu \times \nu) = \int_X \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y).$$

Fubini *Se f è integrabile su $X \times Y$ allora f_x, f^y sono integrabile rispettivamente su Y per q.o. x e su X per q.o. y, inoltre $x \to \int_Y f_x \mathrm{d}\nu, y \to \int_X f^y \mathrm{d}\mu$ definite come sopra sono integrabili rispettivamente su X, Y e vale la formula precedente.*

Osservazione.

1. *Il Teorema di Fubini-Tonelli è falso se si toglie l'ipotesi di σ-finitezza. Prendiamo infatti $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ con $\mu = m$ misura di Lebesgue e $\nu = \#$ misura che conta e $f = \chi_D$ la funzione caratteristica della diagonale $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$: $\int f \mathrm{d}(m \times \#) = \infty$ perché ogni famiglia $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ di rettangoli che ricopre D ne avrà almeno uno con x-sezione E_x più che numerabile, e dunque avrà misura infinita; inoltre, $E_x = \{x\}$ per ogni x, dunque $\#(E_x) = 1$ e quindi $\int \#(E_x) \mathrm{d}m(x) = 1$; infine, $E^y = \{y\}$ per ogni y e quindi $\int m(E^y) \mathrm{d}\#(y) = \int 0 \mathrm{d}\# = 0$.*

2. *Anche sotto ipotesi di σ-finitezza, è necessario assumere che le funzioni integrande siano positive o integrabili: prendendo ad esempio la misura di Lebesgue sui boreliani di $[0,1]^2$ e $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, otteniamo $\int_Y f_x = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ per ogni x e dunque $\int \left(\int_Y f_x \right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$; scambiando il ruolo di x, y avremo invece $\int \left(\int f^y \right) \mathrm{d}y = -\dfrac{1}{2}$.*

Esempio.

1. *Scegliendo* $(X, \mathcal{M}, \mu) = (Y, \mathcal{N}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ *otteniamo che* $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} a(k,l) = \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} a(k,l)$ *per ogni serie a termini positivi o che sia assolutamente convergente rispetto a entrambe le variabili.*

2. *Scegliendo* $(Y, \mathcal{N}, \nu) = \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}, m\right)$, *applicando il Teorema di Tonelli alla funzione indicatrice del sotto-grafico*
$$E := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : \, 0 \le y \le f(x)\}$$
di una funzione $f :\in \mathcal{L}^+(X)$ *otteniamo*
$$(\mu \times m)(E) = \int_X \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} m(E_x)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} \chi_{[0,f(x)]}(y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$
cioè la ben nota interpretazione di integrale di una funzione positiva come area del suo sotto-grafico.
Scambiando l'ordine di integrazione otteniamo invece la formula
$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty \mu(E^y)\mathrm{d}y, \qquad \text{dove } E^y = \{x \in X : \, f(x) \ge y\}.$$

Definizione.
Una ***classe monotona*** *su* X *è una sotto-famiglia* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ *che sia chiuso rispetto a* <u>*unioni crescenti numerabili*</u> *e* <u>*intersezioni decrescenti numerabili*</u>, *ovvero:*
$$\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}, \, E_n \subset E_{n+1} \, \forall n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{C};$$
$$\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}, \, F_{n+1} \subset F_n \, \forall n \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{C}.$$
Dato una una famiglia di insiemi $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, *la classe monotona* ***generata*** *da* $\mathcal{E}$ *è la più piccola classe monotona contenente* $\mathcal{A}$, *cioè l'intersezione di tutte classi monotone che lo contengono.*

Esempio.

1. *Ogni* σ*-algebra è una classe monotona.*

2. *Una qualsiasi intersezione di classi monotone è una classe monotona.*

Lemma (della classe monotona)**.**
Data un'algebra di insiemi $\mathcal{A}$ *su* X, *la* σ*-algebra* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *coincide con la classe monotona generata da* $\mathcal{A}$.

Dimostrazione.
Poiché $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è una classe monotona, la classe monotona $\mathcal{C}$ generata da $\mathcal{A}$ sarà contenuta in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, dunque sarà sufficiente mostrare che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra. Fissiamo $E \in \mathcal{C}$ e definiamo
$$\mathcal{C}(E) := \{F \in \mathcal{C} : \, E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{C} :$$
Si tratta di una classe monotona e inoltre $F \in \mathcal{C}(E) \iff E \in \mathcal{C}(F)$; se poi $E \in \mathcal{A}$ allora, essendo $\mathcal{A}$ un'algebra, $F \in \mathcal{C}(E)$ per ogni $F \in \mathcal{A}$ e dunque $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}$ per ogni $E \in \mathcal{A}$, cioè $E \in \mathcal{C}(F)$ per ogni $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{C}$ e quindi $A \subset \mathcal{C}(F)$, ovvero $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}$ anche per ogni $F \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ è dunque chiusa rispetto all'intersezione e alla differenza di insiemi e, poiché $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, anche rispetto al complementare e dunque è un'algebra; scrivendo poi una qualsiasi unione numerabile $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty \underbrace{\bigcup_{m=1}^n E_m}_{\in\mathcal{C}}$ come unione crescente, otteniamo che $\mathcal{C}$ è chiusa anche rispetto all'unione numerabile ed è dunque una σ-algebra. $\square$

Dimostrazione del Teorema di Fubini. Presa f integrabile, applicando a f^+, f^- il Teorema di Tonelli otteniamo che $x \mapsto \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right)^{\pm} \in \mathcal{L}^+(X)$, dunque sarà finita q.o. e cioè $\left(f^{\pm}\right)_x$ è integrabile q.o., quindi $x \mapsto \int_Y f_x \mathrm{d}\nu$ è integrabile e f_x è integrabile per q.o. x; infine, applicando ancora Tonelli alla parte positiva e negativa di f si ottiene

$$\begin{aligned}
\int f \mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int f^+ \mathrm{d}(\mu \times \nu) - \int f^- \mathrm{d}(\mu \times \nu) \\
&= \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right)^+ \mathrm{d}\mu(x) - \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right)^- \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Lezioni 29-30 del 24/10/2024

Dimostrazione del Teorema di Tonelli.

Passo 1 Il teorema vale se $f = \chi_{A\times B}$ è la funzione caratteristica di un rettangolo:
Se $f = \chi_{A\times B}$ allora $f_x = \chi_{E_x} = \begin{cases} \chi_B & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$, dunque $\displaystyle\int_Y f_x \mathrm{d}\nu = \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$
e quindi

$$\int f \mathrm{d}(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

Passo 2 Il teorema vale per $f = \chi_E$ con E unione finita di rettangoli:
Scrivendo $E = A_1 \times B_1 \cup \cdots \cup A_N \times B_N$ come unione disgiunta, avremo $f = \sum_{n=1}^N \chi_{A_n\times B_n}$, dunque applicando il punto precedente a ciascuna di queste funzioni caratteristiche e la linearità dell'integrale otterremo la misurabilità delle sezioni e

$$(\mu\times\nu)(E) = \sum_{n=1}^N (\mu\times\nu)(A_n\times B_n) = \sum_{n=1}^n \int_X \nu((E_n)_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Passo 3 La classe di insiemi $\mathcal{C} := \{E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N} : \text{ il teorema vale per } \chi_E\}$ è chiusa rispetto a unioni crescenti:
Se $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ con $E_n \in \mathcal{C}, E_n \subset E_{n+1}$, allora $\bigcup_{n=1}^\infty (E_n)_x = E_x$ come unione crescente per ogni x e dunque, per la formula dell'unione crescente, $\nu((E_n)_x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \nu(E_x)$; quindi, applicando nuovamente il Teorema della convergenza monotona a $\nu((E_n)_x)$ e nuovamente la formula dell'unione crescente si ottiene

$$(\mu\times\nu)(E) = \lim_{n\to\infty}(\mu\times\nu)(E_n) = \lim_{n\to\infty}\int_X \nu((E_n)_x) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Passo 4 Se μ, ν sono finite allora $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto a intersezioni decrescenti numerabili, dunque per il Lemma della classe monotona $\mathcal{C} = \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$:
Prendendo $E_n \in \mathcal{C}$ e $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$ come intersezione decrescente, con le stesse notazioni del passo precedente avremo $\bigcap_{n=1}^\infty (E_n)_x = E_x$ come intersezione decrescente, ed essendo $\mu(X), \nu(Y), (\mu\times\nu)(Y) < \infty$ è possibile applicare la formula dell'intersezione decrescente e il Teorema della convergenza dominata con maggiorante integrabile $g \equiv 1$ ottenendo $\nu((E_n)_x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \nu(E_x)$ e, come prima,

$$(\mu\times\nu)(E) = \lim_{n\to\infty}(\mu\times\nu)(E_n) = \lim_{n\to\infty}\int_X \nu((E_n)_x) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Passo 5 $\mathcal{C} = \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ anche se μ, ν sono σ-finite:
Scrivendo $X \times Y = \bigcup_{n,m=1}^\infty X_n \times Y_m$ come unione crescente di rettangoli di misura finita, $E_{n,m} := E \cap (X_n \times Y_m) \in \mathcal{C}$ per ogni $E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ perché $\mu\times\nu$ è finita su $X_n \times Y_m$, ma poiché $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,m}\right)$ è una unione numerabile crescente in entrambi gli indici, allora per il Passo 3 avremo $E \in \mathcal{C}$.

Passo 6 Il teorema vale per $f = \phi$ semplice:

Se $\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}$ allora

$$\int_{X\times Y} \phi = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mu\times\nu)(E_n) = \sum_{n=1}^{N} c_n \int_X \nu((E_n)_x) = \int_X \left(\int_Y \phi_x \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Passo 7 Il teorema vale per $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$:

Dal Teorema di approssimazione con funzioni semplici avremo una successione $\phi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f$, e in particolare $(\phi_n)_x \underset{n\to\infty}{\nearrow} f_x$; grazie al Teorema della convergenza monotona otterremo $g_n := \int_Y (\phi_n)_x \mathrm{d}\nu \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int_Y f_x \mathrm{d}\nu$ e, applicando nuovamente il Teorema della convergenza monotona a ϕ_n, g_n avremo infine

$$\int f \mathrm{d}(\mu\times\nu) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \mathrm{d}(\mu\times\nu) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y (\phi_n)_x \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f_x \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu(x).$$

□

Concludiamo la parte sull'integrazione approfondendo le proprietà della più importante delle misure prodotto, che è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Definizione.
*La **misura di Lebesgue** m^N su $\mathbb{R}^N$ è il completamento della misura prodotto $m \times \ldots \times m$ su $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (o, equivalentemente su $\mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}$). Quando non c'è rischio di ambiguità scriveremo m al posto di m^N e $\int f(x)\mathrm{d}x$ per $\int f(x)\mathrm{d}m(x)$.*
*La famiglia degli insiemi **Lebesgue misurabili** su $\mathbb{R}^N$ è il dominio $\mathcal{L}^N$ di m^N.*

Proposizione.

1. *Se $E \in \mathcal{L}^N$ allora*

$$m(E) = \inf\{m(A) : A \supset E, A \text{ aperto}\} = \sup\{m(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}.$$

2. *$E \in \mathcal{L}^N$ se e solo se $E = A \setminus N$ con A intersezione numerabile di aperti e $m(N) = 0$, se e solo se $E = B \cup M$ con B unione numerabile di chiusi e $m(M) = 0$.*

3. *Se f è integrabile allora esiste una successione $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ di funzioni continue tali che $\int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.*

Dimostrazione.

1. Se $E \in \mathcal{L}^N$ allora, dalla definizione di misura prodotto, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono dei rettangoli $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ che ricoprono E e per cui $\sum_{n=1}^\infty m(R_n) \leq m(E) + \varepsilon$; applicando a ciascun lato di R_n il primo enunciato del Teorema di approssimazione con aperti e compatti troviamo dei rettangoli aperti $A_n \supset R_n$ tali che $m(A_n) \leq m(R_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, dunque l'aperto $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ ricopre E e verifica $m\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty m(A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty m(R_n) + \varepsilon \leq m(E) + 2\varepsilon$. La seconda uguaglianza di dimostra come nel Teorema di approssimazione con aperti e compatti.

2. Segue dal punto precedente come nella dimostrazione del corollario del Teorema di approssimazione con aperti e compatti, che corrisponde al caso $N = 1$.

3. Analoga al caso 1-dimensionale.

$\square$

Proposizione.
La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, ovvero:

1. *Se $E \in \mathcal{L}^N$ allora anche $E + t \in \mathcal{L}^N$ per ogni $t \in \mathbb{R}^N$ e $m(E + t) = m(E)$.*

2. *Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è Lebesgue misurabile allora lo è anche $f(\cdot + t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}^N$ e, se $f \geq 0$ oppure è integrabile, allora $\displaystyle\int f(\cdot + t)\mathrm{d}m = \int f\mathrm{d}m$.*

Dimostrazione.

1. Se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ allora $E + t \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \subset \mathcal{L}^N$ perché le traslazioni preservano la famiglia dei boreliani. L'uguaglianza $m(E + t) = m(E)$ per i rettangoli segue immediatamente dal caso 1-dimensionale e, grazie al Teorema di estensione di misure, anche per ogni boreliano; in particolare, le traslazioni preservano i boreliani di misura nulla e dunque l'uguaglianza $m(E + t) = m(E)$ vale anche per gli insiemi di misura nulla e dunque su tutto $\mathcal{L}^N$.

2. Presa f misurabile, per ogni boreliano $B \subset \mathbb{R}$ abbiamo $(f(\cdot + t))^{-1}(B) = f^{-1}(B) - t$, con $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^N$ e dunque, per quanto appena visto, anche $(f(\cdot + t))^{-1}(B) \in \mathcal{L}^N$ e dunque $f(\cdot + t)$ è misurabile. L'uguaglianza $\displaystyle\int f(\cdot + t)\mathrm{d}m = \int f\mathrm{d}m$ è vera per le funzioni caratteristiche, grazie al punto precedente, e per linearità anche per funzioni semplici; dalla definizione di integrale per funzioni positive, l'uguaglianza vale anche per ogni $f \geq 0$ misurabile, e prendendo parte positiva e negativa di una qualsiasi f integrabile vale anche per funzioni di segno qualunque.

$\square$

Lezioni 31-32 del 28/10/2024

Dopo aver approfondito in modo particolare le misure definite su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$, studieremo ora misure di Borel su spazi metrici più generali, e in particolare il legame tra queste misure e alcuni spazi di funzioni continue su X.

Definizione.
*Una misura di Borel μ su uno spazio metrico X si dice **regolare esterna** su un boreliano $E \in \mathcal{B}_X$ se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : \ A \supset E, \ A \text{ aperto}\}.$$

*μ si dice **regolare interna** su E se*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K \text{ compatto}\}.$$

*Se μ è regolare esterna ed interna su tutti i boreliani di X, si dice **regolare** su X.*
*Se μ è finita su tutti gli insiemi compatti, regolare esterna su tutti i <u>boreliani</u> e regolare interna sugli <u>aperti</u>, si dice **di Radon**.*

Esempio.

1. *Come è stato visto nel Teorema di approssimazione con aperti e compatti, ogni misura di Borel su $\mathbb{R}$ che sia finita sui compatti è regolare e in particolare di Radon.*

2. *La misura che conta # su $\mathbb{R}$ <u>non</u> è regolare interna, e dunque non regolare, su nessun insieme finito perché $\#(A) = \infty$ per ogni aperto A; più in generale, la misura che conta non è mai regolare su nessun X a meno che X non sia discreto.*

Tra tutte le funzioni continue su X, considereremo in particolare i sottospazi definiti in seguito.

Definizione.
*Il **supporto** di una funzione $f \in C(X)$ continua su uno spazio metrico X è il più piccolo insieme chiuso fuori dal quale f è nulla e si indica con*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

*f si dice **a supporto compatto** se $\operatorname{supp}(f)$ è compatto e si denota con*

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \ \operatorname{supp}(f) \text{ è compatto}\}.$$

*$f \in C(X)$ si dice **nulla all'infinito** se l'insieme $\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ è compatto per ogni $\varepsilon > 0$; l'insieme delle funzioni nulle all'infinito si indica con*

$$C_0(X) := \{f \in C(X) : \ f \text{ nulla all'infinito}\}.$$

Osservazione.

1. *$C_c(X)$ e $C_0(X)$ sono sottospazi vettoriali di $C(X)$ e valgono le inclusioni $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C(X)$.*

2. *Se X è compatto allora $C_c(X) = C_0(X) = C(X)$.*

3. *Se $f \in C_0(X)$ allora è f è sempre limitata e il suo modulo ammette massimo, dunque $\|f\|_{C_0(X)} := \sup\limits_X |f| = \max\limits_X |f|$ è una norma su $C_0(X)$.*

Esempio.
Se tutte le palle sono compatte, come ad esempio nel caso di un dominio euclideo $X \subset \mathbb{R}^N$, allora f è nulla all'infinito se e solo se $f(x) \underset{d(x,y)\to\infty}{\to} 0$ per qualche (o equivalentemente ogni) y, come suggerisce il nome.

In particolare, se $X = \mathbb{N}$, tutte le funzioni sono continue e dunque $C_0(\mathbb{N})$ è l'insieme delle successioni infinitesime e si denota con

$$c_0 := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \, x(k) \underset{k \to \infty}{\to} 0 \right\},$$

mentre $C_c(\mathbb{N})$ è l'insieme delle successioni definitivamente nulle:

$$c_{00} := \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \, \exists K \in \mathbb{N} : \, x(k) = 0 \, \forall \, k > K \} .$$

Definizione.
Uno spazio metrico si dice ***localmente compatto*** *se ogni punto ha un intorno compatto.*

Esempio.

1. *$\mathbb{R}^N$ e, più in generale, tutti i suoi sottoinsiemi aperti o chiusi sono localmente compatti.*
2. *Gli spazi discreti, e in particolare $\mathbb{N}$ e gli insiemi finiti, sono localmente compatti.*

Proposizione.
Se X è uno spazio metrico localmente compatto, allora $C_0(X)$ è la chiusura di $C_c(X)$ nella topologia indotta dalla norma uniforme $\|f\|_{C_0(X)} := \sup\limits_X |f|$.

Definizione.
Una ***funzione cutoff*** *tra un sottoinsieme chiuso $C \subset X$ di uno spazio metrico e un sottoinsieme aperto $A \supset C$ è una funzione continua, denotata con $\varphi_{A,C}$, tale che $\chi_C \le \varphi_{A,C} \le \chi_A$, ovvero:*

$$0 \le \varphi_{A,C} \le 1, \qquad \varphi_{A,C}(x) = 1 \, se \, x \in C, \qquad \varphi_{A,C}(x) = 0 \, se \, x \notin A.$$

Esempio.
Una funzione cutoff tra un chiuso C e un aperto A è $\varphi_{A,C}(x) = \dfrac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, C)}$.

Dimostrazione della proposizione.
Se $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione in $C_c(X)$ che converge a f, allora per ogni $\varepsilon > 0$ avremo $\|f - f_n\|_{C_0(X)} < \varepsilon$ per n sufficientemente grande, dunque se $x \notin \operatorname{supp}(f_n)$ allora $|f(x)| < \varepsilon$ e cioè $\{f \ge \varepsilon\} := \{x \in X : \, f(x) \ge \varepsilon\} \subset \operatorname{supp}(f_n)$ e quindi è compatto.
Viceversa, data $f \in C_0(X)$ costruisco una successione $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ in $C_c(X)$ tale che $f_n \underset{n \to \infty}{\to} f$ in questo modo: considero il compatto $C_n := \left\{ |f| \ge \dfrac{1}{n} \right\}$ e lo ricopro con gli aperti $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in C_n}$, con δ_x tale che $\overline{B_{\delta_x}(x)}$ è compatto; estraendone un sottoricoprimento finito $\{B_{\delta_m}(x_m)\}_{m=1}^M$ con $\delta_1 \le \cdots \le \delta_M$, $A_n := \{x : \, d(x, C_n) < \delta_1\}$ sarà un intorno a chiusura compatta di C_n e dunque $f_n := f\varphi_{A_n, C_n} \in C_c(X)$ verifica $|f_n - f| \le |f|\chi_{C_n^c}$, da cui

$$\|f_n - f\|_{C_0(X)} \le \left\| f\chi_{C_n^c} \right\|_{C_0(X)} < \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

□

Il legame, forse sorprendente, tra misure di Radon e funzioni continue è dato dal seguente Teorema fondamentale.

Definizione.
Un funzionale lineare $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ (oppure $L : C_0(X) \to \mathbb{R}$) sulle funzioni continue a supporto compatto (o sulle funzioni continue nulle all'infinito) su uno spazio metrico X si dice ***positivo*** *se assume valori positivi sulle funzioni positive, cioè:*

$$f(x) \ge 0 \, \forall x \in X \qquad \Rightarrow \qquad Lf \ge 0.$$

Esempio.

1. *Un funzionale lineare su* $\mathbb{R}^N$*, che può essere visto come l'insieme delle funzioni (tutte continue) sull'insieme finito* $\{1,\ldots,N\}$*, del tipo* $Lx = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ *è positivo se e solo se* $c_n \geq 0$ *per ogni* n*.*
2. *Per ogni misura di Borel* μ *su* X *che sia finita sui compatti il funzionale* $L : f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ *è positivo.*

Teorema (di rappresentazione di Riesz)**.**
Se X *è uno spazio metrico localmente compatto, per ogni funzionale lineare positivo su* $C_c(X)$ *esiste un'unica misura di Radon* μ *su* X *tale che*

$$Lf = \int f \mathrm{d}\mu, \qquad \forall f \in C_c(X),$$

e inoltre $\mu(X) = \sup_{0\leq f\leq 1} Lf$*.*

Corollario.
Se X *è uno spazio metrico localmente compatto, per ogni funzionale lineare positivo* <u>*continuo*</u> *su* $C_0(X)$ *esiste un'unica misura di Radon* <u>*finita*</u> μ *tale che*

$$Lf = \int f \mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in C_0(X),$$

e inoltre $\mu(X) = \sup_{0\leq f\leq 1} Lf < \infty$*.*

Lezioni 33-34 del 29/10/2024

Esempio.

1. *Su un qualsiasi X il funzionale $L : f \mapsto f(x_0)$ è lineare, positivo e continuo per ogni $x_0 \in X$, e la corrispondente misura di Radon è la misura di Dirac δ_{x_0}; infatti, $\mu(X) = 1$ e inoltre scegliendo $f_0 \in C_0(X)$ tale che $0 \le f_0 \le 1 = f_0(x_0)$ otteniamo $\sup\limits_{0\le f\le 1} Lf = 1$.*

2. *Se $X = [0,1]$ il funzionale $L : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ può essere scritto, grazie al Teorema di Fubini, come*
$$Lf = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)(1-y)\mathrm{d}y,$$
dunque la corrispondente misura di Radon è data da $\mu : E \mapsto \displaystyle\int_E (1-y)\mathrm{d}y$ e $\sup\limits_{0\le f\le 1} Lf = \mu([0,1]) = \displaystyle\int_0^1 (1-y) = \frac{1}{2}$; l'estremo superiore è raggiunto dalla funzione costante $f_0 \equiv 1$.

3. *Il funzionale lineare positivo su $C_c(\mathbb{R})$ dato da $L : f \mapsto \displaystyle\int f\mathrm{d}m$, corrispondente alla misura di Lebesgue secondo il Teorema di rappresentazione di Riesz, <u>non</u> può essere esteso a $C_0(\mathbb{R})$ perché $\displaystyle\int f\mathrm{d}m$ potrebbe non essere finito per delle funzioni $f \in C_0(\mathbb{R})$, come ad esempio $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$; infatti, L non è continuo, perché ad esempio $f_n := \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n)}$ tende a 0 in quanto $\|f_n\|_{C_0(X)} = \dfrac{1}{n}$ ma $Lf_n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 = L(0)$.*

Dimostrazione del corollario.
Dato $L : C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineare, continuo e positivo, dal Teorema di rappresentazione di Riesz so che esiste un'unica misura di Radon tale che $Lf = \displaystyle\int f\mathrm{d}\mu$ per $f \in C_c(X)$. Essendo L continuo in 0, esisterà $\delta > 0$ tale che se $\|f\|_{C_0(X)} < \delta$ allora $|Lf| < 1$, dunque per omogeneità $\sup\limits_{\|f\|\le 1} |Lf| \le \dfrac{1}{\delta}$ e in particolare $\sup\limits_{0\le f\le 1} Lf \le \dfrac{1}{\delta}$; inoltre, per la densità di $C_c(X)$ in $C_0(X)$ e la continuità di L, l'estremo superiore può essere fatto indifferentemente su uno dei due spazi, quindi $\mu(X) = \sup\limits_{0\le f\le 1} Lf \le \dfrac{1}{\delta}$ e cioè μ è finita. Grazie alla finitezza di μ, se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ allora $\left|\displaystyle\int f\mathrm{d}\mu - \int f_n\mathrm{d}\mu\right| \le \|f_n - f\|\mu(X) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ e dunque l'uguaglianza $Lf = \displaystyle\int f\mathrm{d}\mu$ varrà su tutto $C_0(X)$ perché, se $f_n \in C_c(X)$ approssima f allora per la continuità di L avremo:
$$Lf = \lim_{n\to\infty} Lf_n = \lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu.$$
$\square$

Dimostrazione del Teorema di Riesz.
Definiamo, per $A \subset X$ aperto e $E \subset X$ qualsiasi,
$$\nu(A) := \sup\{Lf :\ f \in C_c(A),\ 0 \le f \le 1\}, \qquad \mu(E) := \inf\{\nu(A) :\ A \supset E,\ A \text{ aperto}\}.$$

Passo 1 μ è una misura esterna:

Basterà far vedere che $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ per ogni unione numerabile da aperti, perché da ciò seguirà che

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) : A_n \text{ aperti}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},$$

che come abbiamo visto all'inizio del corso definisce una misura esterna. Questa disuguaglianza equivale, per definizione di ν, a far vedere che $Lf \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ per ogni $f \in C_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ con $0 \leq f \leq 1$. Presa f in questo modo, avremo $K := \operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ per un'opportuna unione finita; scegliendo poi altri aperti B_n a chiusura compatta in A_n tali che $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$, le funzioni $h_n \in C_c(X)$ definite da

$$g_n(x) = \varphi_{A_n,\overline{B_n}}, \qquad g_0 = \varphi_{\left(\bigcup_{n=1}^{N} \overline{B_n}\right)^c,\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)^c}, \qquad h_n = \frac{g_n}{\sum_{n=0}^{N} g_n},$$

verificheranno $0 \leq h_n \leq 1$, $\sum_{n=1}^{N} h_n \equiv 1$ su K e dunque $f = \sum_{n=1}^{N} fh_n$, con $f_n \in C_c(A_n)$ e $0 \leq fh_n \leq 1$, da cui

$$Lf = \sum_{n=1}^{N} L(fh_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Passo 2 Gli aperti sono μ-misurabili, e dunque lo sono anche i boreliani, quindi μ è regolare esterna su $\mathcal{B}_X$ e inoltre $\mu(X) = \sup_{0\leq f\leq 1} Lf$:

Basterà far vedere che se A è aperto e $E \subset X$ è tale che $\mu(E) < \infty$, allora $\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A)$. Se E è aperto, lo è anche $E \cap A$ e dunque, dato $\varepsilon > 0$, esiste $f \in C_c(E \cap A)$ tale che $0 \leq f \leq 1$ e $Lf \geq \nu(E \cap A) - \varepsilon = \mu(E \cap A) - \varepsilon$, e allo stesso modo esiste $g \in C_c(E \setminus \operatorname{supp}(f))$ tale che $0 \leq g \leq 1$ e $Lg \geq \mu(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - \varepsilon$; quindi avremo $f + g \in C_c(E), 0 \leq f + g \leq 1$ e

$$\mu(E) = \nu(E) \geq Lf + Lg \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - 2\varepsilon \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) - 2\varepsilon,$$

ma essendo ε arbitrario avremo $\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A)$. Per E qualsiasi troveremo un aperto B tale che $\mu(B) = \nu(B) \leq \mu(E) + \varepsilon$ e dunque

$$\mu(E) + \varepsilon \geq \mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A),$$

e mandando ε a zero concludiamo anche in questo caso.

Passo 3 $\mu(K) = \inf\{Lf : f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$ per ogni compatto $K \subset X$:

Preso $A \supset K$ è aperto, avremo

$$\varphi_{A,K} \geq \chi_K, \qquad \varphi_{A,K} \in C_c(A), \qquad 0 \leq \varphi_{A,K} \leq 1,$$

dunque $Lf \leq \mu(A)$, da cui $\inf\{Lf : f \geq \chi_K\} \leq \mu(A)$ per ogni aperto $A \supset K$, ma essendo la misura regolare esterna deve valere anche per K al posto di A. Per ottenere l'altra disuguaglianza, mostro che $\mu(K) \leq Lf$ per ogni K compatto e $f \geq \chi_K$: fissato $\varepsilon > 0$, considero l'aperto $A := \{f > 1 - \varepsilon\}$ e $g \in C_c(A)$ con $0 \leq g \leq 1$: poiché $\frac{1}{1-\varepsilon} f - g \geq 0$, per la positività di L avremo $Lg \leq \frac{1}{1-\varepsilon} Lf$ e dunque $\mu(K) \leq \mu(A) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} Lf$, e la dimostrazione è conclusa per l'arbitrarietà di ε.

□

Lezioni 35-36 del 31/10/2024

Fine della dimostrazione del Teorema di Riesz.

Passo 4 μ è di Radon:
Dal passo precedente segue che μ è finita sui compatti. Per mostrare la regolarità interna sugli aperti, prendiamo un aperto A, e $f \in C_c(A)$ tale che $0 \leq f \leq 1$ e $Lf \geq \mu(A) - \varepsilon$: se $g \geq \chi_{\mathrm{supp}\,(f)}$ allora $g - f \geq 0$ e quindi $Lg \geq Lf \geq \mu(A) - \varepsilon$, dunque dal passo precedente $\mu(\mathrm{supp}\,(f)) \geq \mu(A) - \varepsilon$, il che mostra che μ è regolare interna sugli aperti e quindi di Radon.

Passo 5 $Lf = \displaystyle\int f \mathrm{d}\mu$:
Sarà sufficiente mostrare l'uguaglianza nel caso in cui $0 \leq f \leq 1$ e poi argomentare per additività. Fissati $N \in \mathbb{N}, n \in \{1, \ldots, N\}$ definiamo $K_0 := \mathrm{supp}\,(f)$, $K_n := \left\{ f \geq \dfrac{n}{N} \right\}$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{se } f(x) > \dfrac{n}{N} \\ f(x) - \dfrac{n-1}{N} & \text{se } \dfrac{n-1}{N} < f(x) \leq \dfrac{n}{N} \\ 0 & \text{se } f(x) \leq \dfrac{n-1}{N} \end{cases},$$

in modo che $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n$; poiché $\dfrac{1}{N}\chi_{K_n} \leq f_n \leq \dfrac{1}{N}\chi_{K_{n-1}}$, allora $\dfrac{1}{N}\mu(K_n) \leq \displaystyle\int f_n \mathrm{d}\mu \leq \dfrac{1}{N}\mu(K_{n-1})$, dunque dal Passo 3 segue che $Lf_n \geq \dfrac{1}{N}\mu(K_n)$ e inoltre, poiché $0 \leq f_n \leq 1$ e $f \in C_c(A)$ per ogni aperto $A \supset K_{n-1}$, dalla regolarità esterna di μ abbiamo anche $Lf_n \leq \dfrac{1}{N}\mu(K_{n-1})$. Da ciò si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) &\leq \int f \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n), \\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) &\leq Lf \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n), \end{aligned}$$

da cui

$$\left| Lf - \int f \mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{\mu(K_0) - \mu(K_N)}{N} \leq \frac{\mu(\mathrm{supp}\,(f))}{N},$$

ma essendo N arbitrario e $\mu(\mathrm{supp}\,(f)) < \infty$ dovrà essere $Lf = \displaystyle\int f \mathrm{d}\mu$.

Passo 6 μ è unica:
Supponiamo che λ sia un'altra misura di Radon tale che $Lf = \displaystyle\int f \mathrm{d}\lambda$. Se $f \in C_c(A)$ per qualche aperto A e $0 \leq f \leq 1$, allora per monotonia avremo $Lf \leq \lambda(A)$, e dunque per definizione di μ anche $\mu(A) \leq \lambda(A)$. Se poi $f \geq \chi_K$ per qualche compatto K, allo stesso modo $Lf \geq \lambda(K)$ e, per il Passo 3, $\mu(K) \geq \lambda(K)$; poiché λ è regolare interna sugli aperti, preso un aperto A esisterà un compatto $K \subset A$ tale che $\lambda(A) \leq \lambda(K) + \varepsilon$, dunque $\lambda(A) \leq \lambda(K) + \varepsilon \leq \mu(K) + \varepsilon \leq \mu(A) + \varepsilon$ e cioè $\mu(A) \geq \lambda(A)$. μ e λ coincidono quindi sugli aperti e dunque, per la regolarità esterna, anche su tutti i boreliani.

$\square$

Vedremo alcune proprietà che soddisfano queste misure di Radon che abbiamo introdotto. In particolare, un teorema ci garantirà che le misure di Borel che incontreremo nella maggior parte dei casi sono in realtà di Radon.

Teorema (di regolarità delle misure).
Se X è uno spazio metrico localmente compatto in cui ogni aperto è unione numerabile di compatti allora ogni misura di Borel su X che sia finita sui compatti è regolare e in particolare di Radon. In particolare, ogni misura di Borel finita sui limitati di $\mathbb{R}^N$ è regolare.

Lemma.
Se μ è una misura di Radon su uno spazio metrico X allora:

1. *μ è regolare interna sugli insiemi σ-finiti; in particolare, se μ è σ-finita è regolare e inoltre se X è unione numerabile di compatti, ogni misura di Radon su X è regolare.*

2. *Se μ è σ-finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{B}_X$ esistono un aperto A e un chiuso C tale $C \subset E \subset A$ e $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$.*

Dimostrazione.

1. Dimostriamo anzitutto che μ è regolare interna sugli insiemi di misura finita. Se $\mu(E) < \infty$, per la regolarità esterna posso prendere un aperto $A \supset E$ tale che $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$ e per la regolarità interna sugli aperti posso prendere un compatto $K \subset A$ tale che $\mu(K) \geq \mu(A) - \varepsilon$; allo stesso modo, esisterà un aperto $B \supset A \setminus E$ tale che $\mu(B) \leq \mu(A \setminus E) + \varepsilon$, dunque il compatto $C := K \setminus B$ verificherà

$$\begin{aligned}
\mu(C) &= \mu(K) - \mu(K \cap B) \\
&\geq \mu(A) - \varepsilon - \mu(B) \\
&\geq \mu(A) - \varepsilon - (\mu(A \setminus E) + \varepsilon) \\
&= \mu(A) - 2\varepsilon - \mu(A) + \mu(E) \\
&= \mu(A) - 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

il che dimostra la regolarità sugli insiemi di misura finita. Se invece E è σ-finito e $\mu(E) = \infty$, allora scriverò $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ come unione crescente di misurabili di misura finita: fissato $M > 0$ esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_n) \geq M$, e per la regolarità sugli insiemi di misura finita esisterà $K \subset E_n$ tale che $\mu(K_n) \geq \frac{M}{2}$, dunque μ è regolare su E.

2. Scrivendo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ come unioni disgiunta di insiemi di misura finita, per ogni $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ esisterà un aperto $A_n \supset E_n$ tale che $\mu(A_n) \leq \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, dunque l'aperto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ soddisfa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus E\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(E_n)) < \varepsilon;$$

allo stesso modo, troveremo un aperto $B \supset E^c$ tale che $\mu(B \setminus E^c) < \varepsilon$ e dunque il chiuso $B^c \subset E$ soddisfa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B^c\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus E\right) \cup (B \setminus E^c)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus E\right) + \mu(B \setminus E^c) < 2\varepsilon.$$

□

Dimostrazione del Teorema di regolarità delle misure.
Se μ è boreliana e finita sui compatti allora $L : f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ è ben definito per $f \in C_c(X)$ ed è inoltre lineare e positivo, dunque dal Teorema di rappresentazione di Riesz esisterà una misura di

Radon ν tale che $Lf = \displaystyle\int f \mathrm{d}\nu$ per ogni $f \in C_c(X)$. Dato un aperto $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ scritto come unione crescente di compatti, definisco

$$C_n := K_n \cup \bigcup_{m=1}^{n-1} \operatorname{supp}(f_m), \qquad A_n := \{x \in A : d(x, C_n) < \delta_n\}, \qquad f_n = \varphi_{A_n, C_n},$$

con δ_n sufficientemente piccolo affinché A_n abbia chiusura compatta e dunque $f_n \in C_c(X)$; f_n converge crescendo a χ_A e dunque dal Teorema della convergenza monotona otteniamo

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\nu = \nu(A).$$

Essendo ν di Radon, presi $E \in \mathcal{B}_X$ e $\varepsilon > 0$, esisteranno, per il lemma precedente, un aperto A e un chiuso C tali che $C \subset E \subset A$ e $\nu(A \setminus C) < \varepsilon$, ma essendo $A \setminus C$ aperto allora $\mu(A \setminus C) = \nu(A \setminus C) < \varepsilon$ e dunque $\mu(A) \leq \mu(E) + \mu(A \setminus C) \leq \mu(E) + \varepsilon$, il che dimostra la regolarità esterna; inoltre, $\mu(C) \geq \mu(E) - \mu(A \setminus C) \geq \mu(E) - \varepsilon$, e se $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ è unione crescente di compatti lo sarà anche $C = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, con $C_n = K_n \cap C$, e avremo $\mu(C_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(C)$, dunque μ è regolare interna. $\square$

Lezioni 37-38 del 04/11/2024

Per queste misure di Radon vale un importante risultato di approssimazione con funzioni continue.

Teorema (di Lusin).
Se μ è una misura di Radon finita su uno spazio metrico localmente compatto X e $f : X \to \mathbb{R}$ è misurabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $g \in C_c(X)$ e E misurabile tale che $g|_E = f|_E$ e $\mu(E^c) < \varepsilon$, e inoltre $\sup_X |g| \leq \sup_X |f|$.
In particolare, esiste una successione $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ in $C_c(X)$ tale che $g_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ μ-q.o..

Osservazione.

1. *In generale non sarà possibile scegliere $\varepsilon = 0$ nel Teorema di Lusin, cioè non tutte le funzioni misurabili sono uguali q.o. ad una funzione continua: ad esempio, non esiste nessuna funzione continua che coincida con $f(x) = \mathrm{segno}(x)$ per m-q.o. $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Il teorema non dà informazioni sull'insieme dei punti dove una funzione misurabile è continua: ad esempio, $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è uguale alla funzione continua $g \equiv 0$ m-q.o. su $\mathbb{R}$, coerentemente con l'enunciato del teorema, ma non è continua in nessun punto.*

Esempio.
Se $f = \chi_E$ è la funzione caratteristica di un boreliano di X a chiusura compatta, nel Teorema di Lusin si può scegliere $g = \varphi_{A,K}$ con K compatto e A aperto tali che $K \subset E \subset A$ e $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$, la cui esistenza è garantita dalla regolarità dimostrata nel lemma precedente; a meno di rimpicciolire A, si può supporre che $\overline{A}$ sia compatto, e cioè che $\varphi_{A,C} \in C_c(X)$.

Dimostrazione del Teorema di Lusin.
Anzitutto possiamo supporre che f sia limitata: se non lo è, fissato $\varepsilon > 0$ considereremo al suo posto $f\chi_{E_n}$ con $E_n := \{|f| \leq n\}$, che verifica $\mu(E_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(X)$ e n sufficientemente grande affinché $\mu(E_n^c) < \varepsilon$; chiaramente $f\chi_{E_n}$ sarà limitata e coinciderà con f su E^c. Assumendo f limitata, a meno di comporre con una mappa lineare potremo supporre $0 \leq f \leq 1$.
Dal Teorema di approssimazione con funzioni semplici esisterà una successione $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ di funzioni semplici tali che $\phi_n \underset{n\to\infty}{\to} f$, ovvero $f = \sum_{n=1}^\infty \psi_n$ con $\psi_n := \phi_n - \phi_{n-1}$, e inoltre dalla costruzione di ϕ_n segue che ψ_n assume solo valori $0, \frac{1}{2^n}$, dunque $f = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\chi_{E_n}$ per opportuni E_n boreliani; prendendo, grazie al Teorema di regolarità delle misure, un compatto K tale che $\mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon$, potremo scrivere allo stesso modo $f\chi_K = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\chi_{F_n}$ con $F_n = E_n \cap K$. Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo un compatto C_n e un aperto A_n tali che $C_n \subset F_n \subset A_n$ e $\mu(A_n) \leq \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ e definiamo

$$h := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\varphi_{A_n,C_n} :$$

h è continua perché lo sono le φ_{A_n,C_n} e la serie converge totalmente, ed è a supporto compatto scegliendo $A_n \subset A$ per ogni n con $\overline{A}$ compatto, lecito in quanto X è localmente compatto; inoltre, essendo $\varphi_{A_n,C_n} = \chi_{F_n}$ al di fuori di $A_n \setminus C_n$, avremo $h = f$ su $E := K \setminus \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus C_n)$, il cui complementare misura

$$\mu(X \setminus E) = \mu(X) - \mu(K) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus C_n)\right) < \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty (\mu(A_n) - \mu(C_n)) < \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Infine, definendo

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } |h(x)| \leq \|f\|_{C_0(X)} \\ \|f\|_{C_0(X)} & \text{se } h(x) > \|f\|_{C_0(X)} \\ -\|f\|_{C_0(X)} & \text{se } h(x) < -\|f\|_{C_0(X)} \end{cases},$$

avremo $\|g\|_{C_0(X)} \leq \|h\|_{C_0(X)}$ e g coinciderà con h nei punti in cui h coincide con f, dunque $\mu(\{g \neq f\}) \leq \mu(\{h \neq f\}) < 2\varepsilon$. □

Vediamo ora come considerare misure che possano assumere anche valori negativi. Una delle principali novità è che consideremo solamente misure finite, per evitare conflitti dovuti alla somma di infiniti con segno opposto.

Definizione.
Una ***misura con segno*** *(finita) su una σ-algebra $\mathcal{M}$ su X è una funzione $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ numerabilmente additiva, cioè:*

$$E_n \cap E_m = \emptyset \, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \qquad \Rightarrow \qquad \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Un insieme misurabile $E \subset \mathcal{M}$ si dice:

positivo *per ν se $\nu(F) \geq 0$ per ogni insieme misurabile $F \subset E$;*

negativo *per ν se $\nu(F) \leq 0$ per ogni misurabile $F \subset E$;*

nullo *per ν se è allo stesso tempo positivo e negativo, cioè $\nu(F) = 0$ per ogni misurabile $F \subset E$.*

Esempio.

1. *Dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e f integrabile, $\nu = f\mu : E \mapsto \int_E f \mathrm{d}\mu$ è una misura con segno, perché data un'unione disgiunta $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ possiamo applicare un corollario del Teorema della convergenza dominata alla serie di $f\chi_{E_n}$, che verifica $\sum_{n=1} \int |f\chi_{E_n}| \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$, in quanto $|f_n| \leq |f|$, e dunque*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu.$$

2. *Una misura è una misura con segno se e solo se è finita.*

3. *Una combinazione lineare $a\nu_1 + b\nu_2$ di misure con segno ν_1, ν_2 con $a, b \in \mathbb{R}$ è ancora una misura con segno; in particolare, la differenza di due misure con segno è una misura con segno.*

4. *La restrizione $\nu|_E$ di una misura con segno ν a un insieme misurabile $E \in \mathcal{M}$ è ancora una misura con segno; $\nu|_E$ è una misura (positiva) se e solo se E è positivo per ν, mentre $(-\nu)|_E$ è una misura positiva se e solo se E è negativo per ν.*

Osservazione.

1. *Data una misura con segno ν, se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi misurabili allora $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) E_n = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$; se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione decrescente di misurabili allora $\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\right) E_n = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$.*

2. *Le misure con segno non sono in generale monotone, perché se $F \subset E$ e $\nu(E \setminus F) < 0$ allora $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus E) < \nu(F)$.*

3. *Ogni insieme E che sia nullo per una misura con segno ν verifica $\nu(E) = 0$; se ν è positiva, vale anche il viceversa perché in questo caso ν è una misura e dunque è monotona, ma ciò è falso per misure con segno generali: se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e $\nu(E_1) = -\nu(E_2) > 0$, allora $E_1 \cup E_2$ ha misura nulla ma non è nullo.*

4. *Un sottoinsieme di un insieme positivo (rispettivamente negativo, nullo) è un insieme positivo (risp. negativo, nullo); l'unione numerabile di insiemi positivi (risp. negativi, nulli) è ancora un insieme positivo (risp. negativo, nullo).*

I seguenti risultati ci permettono di scomporre una misura con segno in una differenza di due misure positive, in modo essenzialmente unico.

Teorema (di decomposizione di Hahn)**.**
Data una misura con segno ν esistono un insieme P positivo per ν e un insieme N negativo per ν tali che $P \cup N = X$ e $P \cap N = \emptyset$; inoltre, se P', N' è un'altra decomposizione con le stesse proprietà, allora $P' \setminus P$ e $N' \setminus N$ sono nulli.
In particolare, scrivendo $E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$, ogni misurabile può essere scritto come unione di un insieme positivo e di un insieme negativo.
La decomposizione $X = P \cup N$ è chiamata ***decomposizione di Hahn*** *per ν.*

Osservazione.
La decomposizione di Hahn non sarà in generale unica, perché gli insiemi ν-nulli potrebbero appartenere a P oppure a N.

Esempio.
Se $\nu(E) = f\mu$ allora P è un qualsiasi misurabile contenente $\{f > 0\}$, contenuto in $\{f \geq 0\}$, unito a un qualsiasi insieme E con $\mu(E) = 0$.

Lezioni 39-40 del 05/11/2024

Dimostrazione del Teorema di decomposizione di Hahn.
Mostriamo che la decomposizione è unica a meno di insiemi nulli: se P, N e P', N' sono due decomposizioni con le proprietà richiesta, allora $P \supset P \setminus P' = N' \setminus N \subset N'$, dunque $P \setminus P'$ è sia positivo che negativo e dunque nullo, e allo stesso modo $N \setminus N'$ è anch'esso nullo. Definendo $M := \sup\{\nu(E) : E \text{ positivo per } \nu\}$, esisterà una successione di insiemi positivi P_n tali che $\nu(P_n) \underset{n\to\infty}{\to} M$; l'insieme $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ sarà positivo, per quanto osservato in precedenza, e inoltre $\nu(P) = M$. Sarà ora sufficiente mostrare che $N := X \setminus P$ è negativo.
Anzitutto, N non può contenere nessun insieme positivo non nullo E, perché se E è positivo e $\nu(E) > 0$ allora $E \cup P$ è positivo e $\nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > M$, contraddicendo la massimalità di M. Dunque, se esistesse $E_0 \subset N$ di misura positiva allora conterrebbe $F \subset E_0$ di misura negativa e pertanto $\nu(E_0 \setminus F) = \nu(E_0) - \nu(F) > \nu(E_0)$; quindi, se N non fosse negativo, potremmo definire induttivamente ε_n, E_n come:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n := \sup\{\varepsilon > 0 : \exists E \subset E_{n-1} : \nu(E) \geq \nu(E_{n-1}) + \varepsilon\}, \\ &E_n \in \mathcal{M} \text{ tale che } \nu(E_n) \geq \nu(E_{n-1}) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

dalla formula dell'intersezione decrescente avremo

$$\infty > \nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n + \nu(E_0),$$

dunque $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Ripetendo il ragionamento, dovrà esserci $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ con $\nu(E) \geq \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$, ma poiché $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, allora $\varepsilon > \varepsilon_n$ per n sufficientemente grande; essendo però $E \subset E_n$, ciò è in contraddizione con la definizione di ε_n, E_n e N deve pertanto essere negativo. $\square$

Definizione.
*Due misure, o misure con segno, μ, ν si dicono **singolari tra loro** se esistono $E, F \in \mathcal{M}$ tali che $E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$, E è nullo per ν e F è nullo per μ. Due misure (con segno) singolari tra loro si indicano con il simbolo $\mu \perp \nu$.*

Esempio.

1. *Le restrizioni $\nu|_{E_1}, \nu|_{E_2}$ di una misura con segno ν a due misurabili E_1, E_2 sono singolari tra loro se e solo se $E_1 \cap E_2$ è nullo per ν: in caso affermativo, basta prendere nella definizione $E_1 = E, E_2 = F$; se invece l'intersezione non è nulla, con qualsiasi decomposizione $X = E \cup F$ con $E \cap F = \emptyset$, E non potrà essere nullo per $\nu|_{E_1}$ se $E \cap E_1 \cap E_2$ non è nullo per ν e F non potrà esserlo per $\nu|_{E_2}$ se non è nullo $F \cap E_1 \cap E_2$.*

2. *La misura di Dirac δ_{x_0} su un insieme di misura finita $A \subset \mathbb{R}^N$ contenente x_0 e la misura di Lebesgue sono singolari tra loro: basta prendere $E = \{x_0\}$ e $F = A \setminus \{x_0\}$.*

3. *La <u>misura di Cantor</u> μ su $[0,1]$, cioè la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione di Cantor F è singolare rispetto alla misura di Lebesgue, come segue scegliendo $E = C$ l'insieme di Cantor e $F = [0,1] \setminus C$; infatti, abbiamo già visto che $m(C) = 0$ e inoltre, scrivendo $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ come unione disgiunta, F sarà costante su ciascun intervallo e dunque*

$$\mu((a_n, b_n)) \leq \mu((a_n, b_n]) = F(b_n) - F(a_n) = 0,$$

da cui $\mu([0,1] \setminus C) = 0$.

Teorema (di decomposizione di Jordan).
Data una misura con segno ν esiste un'unica coppia $\nu^\pm$ di misure finite tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$. In particolare, ogni misura con segno è la differenza di due misure positive finite.
*La coppia ν^+, ν^- si chiama **decomposizione di Jordan**; le misure ν^+, ν^- si chiamano rispettivamente **variazione positiva** e **variazione negativa** di ν e la misura $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ si chiama **variazione totale** di ν.*

Esempio.
Se $\nu = \int f \mathrm{d}\mu$, allora la decomposizione di Jordan è data da $\nu^\pm = \int f^\pm \mathrm{d}\mu$ e la variazione totale è $|\nu| = \int |f| \mathrm{d}\mu$.

Dimostrazione del Teorema di decomposizione di Jordan.
Data una decomposizione di Hahn $X = P \cup N$, definiamo $\nu^+(E) := \nu(E \cap P)$ e $\nu^-(E) := -\nu(E \cap N)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$; essendo P positivo e N negativo, $\nu^\pm \geq 0$ e dunque sono misure positive, singolari tra di loro perché N è nullo per ν^+ e P è nullo per ν^- e $\nu(E) = \nu((E \cap P) \cup (E \cap N)) = \nu^+(E) - \nu^-(E)$.
Se poi esiste un'altra decomposizione $\nu = \mu^+ - \mu^-$ con $\mu^+ \perp \mu^-$ e $E, F \in \mathcal{M}$ sono tali che $E \cap F = \emptyset, E \cup F = X$ e $\mu^-(E) = \mu^+(F) = 0$, allora E è positivo e F è negativo per ν, dunque $X = E \cup F$ è un'altra decomposizione di Hahn; quindi dal Teorema di decomposizione di Hahn saranno nulli $P \setminus E$ e $N \setminus F = E \setminus P$, dunque essendo $\mu^+ = \nu|_E$ avremo

$$\mu^+(A) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap (P \setminus E)) - \nu(A \cap (E \setminus P)) = \nu(A \cap E) = \nu^+(A)$$

per ogni $A \in \mathcal{E}$, e analogamente $\mu^- = \nu^-$. $\square$

Osservazione.
Scrivendo $\nu^\pm(E) = \sup\{\pm\nu(E \cap F) : F \in \mathcal{M}\}$ otteniamo le disuguaglianze triangolari $(\nu_1 + \nu_2)^\pm \leq \nu_1^\pm + \nu_2^\pm$ e $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$ per ogni coppia ν_1, ν_2 di misure, e in tutti e tre i casi l'uguaglianza vale se e solo se ν_1, ν_2 ammettono una stessa decomposizione di Hahn. In particolare, $\|\nu\| := |\nu|(X)$ è una norma sullo spazio delle misure con segno su X.

Definizione.
*Data una misura con segno ν scritta in decomposizione di Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$, con $\nu^\pm$ misure positive, definiamo l'**integrale** di una funzione integrabile rispetto a $|\nu|$ come*

$$\int f \mathrm{d}\nu := \int f \mathrm{d}\nu^+ - \int f \mathrm{d}\nu^-.$$

Osservazione.
Come per l'integrazione rispetto a misure positive, anche l'integrazione rispetto a misure con segno è lineare e inoltre

$$\begin{aligned}
\left| \int f \mathrm{d}\nu \right| &= \left| \int \left(f^+ \mathrm{d}\nu^+ + f^- \mathrm{d}\nu^- \right) - \int \left(f^- \mathrm{d}\nu^+ + f^- \mathrm{d}\nu^+ \right) \right| \\
&\leq \int \left(f^+ \mathrm{d}\nu^+ + f^- \mathrm{d}\nu^+ + f^- \mathrm{d}\nu^+ + f^- \mathrm{d}\nu^- \right) \\
&= \int |f| \mathrm{d}|\nu|,
\end{aligned}$$

con l'uguaglianza che vale se e solo se f ha segno costante sui due insiemi P, N dati dalla decomposizione di Hahn; in particolare, $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ e l'uguaglianza vale se e solo se E è positivo o negativo per ν.

Lezioni 41-42 del 07/11/2024

Grazie all'introduzione delle misure con segno, possiamo estendere il Teorema di rappresentazione Riesz a funzionali non necessariamente positivi.

Definizione.
Una misura con segno di Borel ν su uno spazio metrico X si dice ***di Radon*** *se la parte positiva e negativa $\nu^{\pm}$ sono entrambe misure di Radon. Lo spazio delle misure con segno di Radon su X si indica con $M(X)$.*

Osservazione.

1. *Una misura con segno è di Radon se e solo se lo è la sua variazione totale $|\nu|$.*
2. *Le misure di Radon su X sono uno spazio normato con la norma data dalla variazione totale $\|\nu\|_{M(X)} := |\nu|(X)$.*

Esempio.
Grazie al Teorema di regolarità delle misure, ogni misura con segno di Borel su $\mathbb{R}^N$ è di Radon.

Definizione.
Lo spazio ***duale*** *di uno spazio normato Y è lo spazio dei funzionali lineari e continui su Y e si indica come*

$$Y^* := \{L : Y \to \mathbb{R} : L \text{ lineare e continuo}\}.$$

Osservazione.

1. *Come abbiamo già visto, esistono funzionali lineari non continui e dunque non è superfluo richiedere la continuità di un funzionale lineare.*
2. *Lo spazio duale di Y è a sua volta uno spazio normato con $\|L\|_{Y^*} := \sup_{\|y\|\leq 1} |Ly|$; la norma è ben definita perché se δ è tale che per $\|y\| < \delta$ ho $|Ly| < 1$ allora per omogeneità $\|L\|_{Y^*} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$.*

Teorema (di Riesz per misure con segno)**.**
Se X è uno spazio metrico localmente compatto allora $L \in C_0(X)^*$ esiste un'unica misura con segno di Radon $\mu \in M(X)$ su X tale che

$$Lf = \int f \mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in C_0(X),$$

e inoltre questa corrispondenza preserva le rispettive norme, ovvero:

$$|\mu|(X) = \|\mu\|_{M(X)} = \|L\|_{C_0(X)*} = \sup_{-1\leq f\leq 1} Lf.$$

Esempio.
Nel caso $X = \mathbb{N}$, come abbiamo già visto $C_0(\mathbb{N}) = c_0$ è lo spazio delle successioni infinitesime; le misure con segno di Radon ν sono invece determinate dal valore $\nu(\{n\})$ assunto su ciascun punto $n \in \mathbb{N}$ e la variazione totale è $|\nu|(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(\{n\})|$. Dunque, una misura con segno di Radon equivale a una serie assolutamente convergente e quindi, grazie al Teorema di Riesz, c_0^* corrisponde allo spazio delle serie assolutamente convergenti

$$\ell_1 := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty \right\}.$$

Lemma.
Ogni funzionale $L \in C_0(X)^*$ si può scrivere come differenza $L = L^+ - L^-$ di due funzionali <u>positivi</u> $L^{\pm} \in C_0(X)^*$.

Dimostrazione.
Dati $L \in C_0(X)^*$ definisco, per $f \geq 0$,

$$\begin{aligned}
L^+(f) &:= \sup\{Lg : g \in C_0(X),\, 0 \leq g \leq f\}, \\
L^-(f) &:= L^+(f) - Lf = \sup\{L(g-f) : g-f \in C_0(X),\, -f \leq g-f \leq 0\} = (-L)^+(f),
\end{aligned}$$

e, per $f \in C_0(X)$ qualsiasi, $L^\pm(f) = L^\pm(f^+) - L^\pm(f^-)$; vista la simmetria tra L^+ e L^-, sarà sufficiente dimostrare che L^+ è lineare, continuo e positivo.
Mostriamo la linearità di L^+ per $f \geq 0$: se $0 \leq g_1 \leq f_1, 0 \leq g_2 \leq f_2$ allora $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, da cui $L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = Lg_1 + Lg_2$, dunque passando all'estremo superiore $L^+(f_1 + f_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2)$; se poi $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ allora $g_1 := \min\{g, f_1\}, g_2 := \max\{0, g - f_1\}$ verificano $0 \leq g_i \leq f_i$ per $i = 1, 2$ e $g = g_1 + g_2$, dunque $Lg = Lg_1 + Lg_2 \leq L^+(f_1) + L^+(f_2)$ e passando all'estremo superiore $L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2)$, il che mostra la linearità tra le funzioni positive. Scrivendo poi, per f, g qualsiasi, $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$, dalla additività per funzioni positive avremo

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

da cui segue l'additività per funzioni qualunque, come nella dimostrazione della linearità dell'integrale. L'omogeneità segue dalla definizione per $c, f \geq 0$ e, per f qualunque,

$$L^+(cf) = L^+(cf^+) - L^+(cf^-) = cL^+(f^+) - cL^+(f^+) = cL^+(f),$$

e in modo analogo se $c < 0$. La positività di L^+ segue immediatamente dalla definizione; infine, L^+ è continuo perché se $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ allora, essendo $|L^+f| \leq \|L\|_{C_0(X)^*}\|f\|_{C_0(X)}$, otterremo

$$\begin{aligned}
\left|L^+(f_n - f)\right| &= \max\left\{(L^+(f_n - f))^+, (L^+(f_n - f))^-\right\} \\
&= \max\left\{L^+(f_n - f)^+, L^+(f_n - f)^-\right\} \\
&\leq \max\left\{\|L\|_{C_0(X)^*}\left\|(f_n - f)^+\right\|_{C_0(X)}, \|L\|_{C_0(X)^*}\left\|(f_n - f)^-\right\|_{C_0(X)}\right\} \\
&= \|L\|_{C_0(X)^*}\|f_n - f\|_{C_0(X)} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Dimostrazione del Teorema di Riesz per misure con segno.
Dal lemma precedente ogni $L \in C_0(X)^*$ è del tipo $L = L^+ - L^-$ con $L^\pm : f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu^\pm$ per delle misure di Radon $\mu^\pm$, dunque $f \mapsto \int f\mathrm{d}\mu$ con $\mu := \mu^+ - \mu^-$ misura con segno di Radon. Per verificare che $\|L\|_{C_0(X)^*} = \|\mu\|_{M(X)}$ anzitutto avremo

$$|Lf| = \left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\mathrm{d}|\mu| \leq \|f\|_{C_0(X)}|\mu|(X).$$

e dunque $\|L\|_{C_0(X)^*} = \|\mu\|_{M(X)}$; scrivendo poi $|\mu| = f\mu$, con $f = (\chi_P - \chi_N)$ e P, N dati dalla decomposizione di Hahn, dal Teorema di Lusin per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà $g \in C_c(X)$ tale che $g = f$ su un insieme E con $|\mu|(E^c) < \varepsilon$ e $\|g\|_{C_0(X)} \leq 1$, da cui

$$\begin{aligned}
\|\mu\|_{M(X)} &= \int f\mathrm{d}\mu \\
&= Lg + \int_{E^c}(f - g)\mathrm{d}\mu \\
&\leq \|L\|_{C_0(X)^*}\|g\|_{C_0(X)} + \int_{E^c}(|f| + |g|)\mathrm{d}|\mu| \\
&\leq \|L\|_{C_0(X)^*} + (\|f\|_{C_0(X)} + \|g\|_{C_0(X)})|\mu|(E^c) \\
&\leq \|L\|_{C_0(X)^*} + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

ed essendo ε arbitrario otteniamo $\|\mu\|_{M(X)} = \|L\|_{C_0(X)^*}$. □

Studieremo ora più in dettaglio la struttura delle misure e delle misure con segno. Inizieremo a definire una proprietà delle misure, antitetica rispetto alla mutua singolarità e legata in qualche modo alla continuità di funzioni, nel senso che spiegherà il primo risultato che daremo.

Definizione.
*Una misura, o misura con segno, ν su una σ-algebra $\mathcal{M}$ si dice **assolutamente continua** rispetto a una misura μ su $\mathcal{M}$ se $\nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$.*
Una misura con segno assolutamente continua rispetto a una misura si indica con il simbolo $\nu \ll \mu$.

Osservazione.

1. *L'insieme delle misure con segno assolutamente continue rispetto a una data μ è un sottospazio vettoriale.*
2. *Se $\nu \perp \mu$ e $\nu \ll \mu$ allora $\nu = 0$ è la misura nulla.*
3. *La somma di due misure con segno ν_1, ν_2 singolari tra di loro sarà assolutamente continua rispetto a μ se e solo se lo sono sia ν_1 sia ν_2; in particolare, $\nu \ll \mu$ se e solo se $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$ se e solo se $|\nu| \ll \mu$.*

Esempio.

1. *La misura $\nu = f\mu$ è assolutamente continua rispetto a μ per qualsiasi f integrabile o misurabile positiva; in particolare, lo è la restrizione $\nu|_E = \chi_E \mu$ per ogni misurabile E.*
2. *Ogni misura con segno ν è assolutamente continua rispetto a $|\nu|$, ma non è assolutamente continua rispetto a ν^+ (rispettivamente ν^-), a meno che ν non sia $\nu^- \equiv 0$ (risp. $\nu^+ \equiv 0$); in particolare, $\mu \ll \mu$ per ogni misura positiva μ.*

Lezioni 43-44 del 11/11/2024

Proposizione.
Date una misura con segno ν e una misura μ, $\nu \ll \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mu(E) < \delta$ allora $|\nu(E)| < \varepsilon$.
In particolare, se f è integrabile rispetto a μ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mu(E) < \delta$ allora $\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$.

Osservazione.
L'enunciato della proposizione è falso se ν è una misura positiva non finita: prendendo ad esempio $\mu = m$ la misura di Lebesgue su $(0,1)$ e $\nu(E) = \int_E \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, abbiamo $m\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ma $\nu\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \ln 2 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Dimostrazione della proposizione.
Poiché $\nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu$ e $|\nu(E)| \le |\nu|(E)$, sarà sufficiente considerare il caso di $\nu \ge 0$.
Se $\nu \not\ll \mu$ esisterà E_0 tale che $\mu(E_0) = 0$ e $\nu(E_0) > 0$, allora per $\varepsilon \le \nu(E_0)$ la condizione con ε, δ non sarà soddisfatta per nessun $\delta > 0$.
Viceversa, se non vale la seconda condizione, esisterà un qualche $\varepsilon > 0$ per cui per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $E_n \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ e $\nu(E_n) \ge \varepsilon$; definendo ora $F_n := \bigcup_{m \ge n} E_m, F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ avremo $\mu(F_n) \le \sum_{m=n}^{\infty} \mu(E_m) < \frac{1}{2^{n-1}}$ e dunque $\mu(F) < \frac{1}{2^{n-1}}$ per ogni n e cioè $\mu(F) = 0$, ma essendo $\nu(F_n) \ge \nu(E_n) \ge \varepsilon$ allora dalla formula dell'intersezione decrescente otteniamo $\nu(F) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) \ge \varepsilon$ e dunque ν non può essere assolutamente continua rispetto a μ. □

Il seguente teorema mostra che le misure, o misure con segno, si possono scomporre in due parti con proprietà molto diverse una dall'altra.

Teorema (di Radon-Nikodym)**.**
Data una misura σ-finita, o misura con segno, ν e una misura σ-finita μ su $\mathcal{M}$, esiste un'unica coppia λ, ρ di misure σ-finite (rispettivamente, misure con segno) su $\mathcal{M}$ tali che

$$\nu = \lambda + \rho, \qquad \lambda \perp \mu, \qquad \rho \ll \mu.$$

Esiste inoltre $f : X \to \mathbb{R}$ positiva e misurabile (risp. μ-integrabile), unica a meno di insiemi di misura nulla, tale che $\rho = f\mu$; in particolare, se $\rho \ll \mu$ allora è del tipo $\rho = f\mu$.
*Questa decomposizione si chiama **decomposizione di Lebesgue** e la f si chiama **derivata di Radon-Nikodym** di ν rispetto a μ e si indica con $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.*

Osservazione.

1. *Il primo enunciato del Teorema di Radon-Nikodym equivale a dire che lo spazio delle misure con segno è somma diretta dei due sottospazi delle misure singolari rispetto a μ e di quelle assolutamente continue rispetto a μ.*

2. *L'enunciato del teorema potrebbe essere falso se una delle due misure non è σ-finita: prendendo ad esempio $\nu = m$ la misura di Lebesgue e su $\mathbb{R}^N$ e $\mu = \#$ la misura che conta, avremo $m \ll \#$ ma m non si può scrivere come integrale di una qualche funzione rispetto a $\#$, perché tutte le misure di questo tipo sono infinite su insiemi più che numerabili. Analogamente, prendendo $\nu = \#, \mu = m$, ogni misura del tipo $\rho = fm$ è nulla su insiemi numerabili e dunque se si potesse scrivere $\# = \lambda + \rho$ sarebbe $\# = \lambda \perp m$ che è assurdo.*

Esempio.
Se $\mu = |\nu|$ è la variazione totale di ν, allora $\lambda = 0$ e $\rho = \nu$, perché $\nu \ll |\nu|$, e inoltre $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}|\nu|} = \chi_P - \chi_N$, dove P, N è una decomposizione di Hahn.

Lemma.
Date due misure finite ν, μ su $\mathcal{M}$ che <u>non</u> siano singolari tra loro, esistono $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(E) > 0$ e E è un insieme positivo per $\nu - \varepsilon\mu$.

Dimostrazione.
Consideriamo, per $n \in \mathbb{N}$, la misura con segno $\nu - \frac{1}{n}\mu$, scriviamo in decomposizione di Hahn per μ $X = P_n \cup N_n$ e definiamo $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, N := \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$, in modo che $X = P \cup N$ con $P \cap N \neq \emptyset$. N sarà negativo per $\nu - \frac{1}{n}\mu$ per ogni n, dunque $\nu(N) \leq \frac{\mu(N)}{n}$ per ogni n e cioè $\nu(N) = 0$; se fosse $\mu(P) = 0$, allora sarebbe $\nu \perp \mu$ e dunque dev'essere $\mu(P) > 0$, cioè $\mu(P_n) > 0$ per qualche n. Poiché P_n è positivo per $\nu - \frac{1}{n}\mu$, abbiamo concluso ponendo $\varepsilon := \frac{1}{n}, E := P_n$. $\square$

Dimostrazione del Teorema di Radon-Nikodym.
Anzitutto sarà sufficiente considerare il caso di μ, ν sono finite: nel caso σ-finito basterà scrivere $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ come unione disgiunta con $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$, applicare il Teorema alle misure finite $\mu_n := \mu|_{X_n}, \nu_n := \nu|_{X_n}$, che si decomporranno dunque come $\nu_n = \lambda_n + \rho_n = \lambda_n + f_n\mu$ e porre $\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \rho := \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n, f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; potremo inoltre restringerci al caso di misure positive perché in generale, scrivendo in decomposizione di Lebesgue $\nu^{\pm} = \lambda^{\pm} + \rho^{\pm}$ e $\rho^{\pm} = f_{\pm}\mu$, la decomposizione di Lebesgue sarà $\nu = (\lambda^+ - \lambda^-) + (\rho^+ - \rho^-)$.
Nel caso di una misura positiva finita ν, prendiamo l'insieme di funzioni misurabili

$$\mathcal{F} := \left\{ f : X \to [0, \infty] : \int_E f \mathrm{d}\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{M} \right\},$$

non vuoto perché $0 \in \mathcal{F}$.

Passo 1 Se $f, g \in \mathcal{F}$, allora $\max\{f, g\} \in \mathcal{F}$:
prese $f, g \in \mathcal{F}$, avremo, per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E \max\{f, g\} \mathrm{d}\mu = \int_{E \cap \{f \geq g\}} f \mathrm{d}\mu + \int_{E \cap \{f < g\}} g \mathrm{d}\mu \leq \nu(E \cap \{f \leq g\}) + \nu(E \cap \{f < g\}) = \nu(E);$$

Passo 2 L'estremo superiore $M := \sup_{\mathcal{F}} \int f \mathrm{d}\mu$ viene raggiunto:
Prendiamo una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{F}$ tale che $\int f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\to} M$; la successione $g_n := \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ sarà monotona crescente, dunque convergerà a una certa $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, inoltre $g_n \in \mathcal{F}$ per quanto visto in precedenza e, poiché $\int g_n \mathrm{d}\mu \geq \int f_n \mathrm{d}\mu$, avremo $\int g_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\to} M$, dunque dal Teorema della convergenza monotona $\int f \mathrm{d}\mu = M$; del resto, poiché $M \leq \nu(E) < \infty$, f sarà integrabile rispetto a μ e quindi a valori finiti, a meno di ri-definirla su un insieme di misura nulla.

Passo 3 $\lambda := \nu - f\mu$ è una misura positiva singolare rispetto a μ:
$\lambda \geq 0$ perché $f \in \mathcal{F}$; inoltre, se non fosse singolare, dal lemma precedente esisterebbero $E \in \mathcal{M}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\mu(E) > 0$ e E positivo per $\lambda - \varepsilon\mu$; ciò vuol dire che $\varepsilon\mu|_E \leq \lambda|_E \leq \lambda = \nu - f\mu$, ovvero $(f + \varepsilon\chi_E)\mu \leq \nu$ e cioè $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, ma $\int (f + \varepsilon\chi_E) \mathrm{d}\mu = M + \varepsilon\mu(E) > M$, contraddicendo la massimalità di M.

Passo 4 Unicità di λ, f:
Se fosse $\nu = \lambda + f\mu = \lambda' + f'\mu$, avremmo $\lambda - \lambda' = (f' - f)\mu$, ma essendo $\lambda - \lambda' \perp \mu$ e $(f - f')\mu \ll \mu$ dovrà essere $\lambda - \lambda' = 0 = (f - f')\mu$, cioè $(\lambda, f\mu) = (\lambda', f'\mu)$.

$\square$

Corollario.
Data una misura σ-finita μ e una misura σ-finita, o misura con segno, ν su $\mathcal{M}$ tali che $\nu \ll \mu$, per ogni g integrabile rispetto a μ vale $\displaystyle\int g \mathrm{d}\nu = \int g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$.
Se λ è un'altra misura tale che $\mu \ll \lambda$, allora $\nu \ll \lambda$ e $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ λ-q.o.; in particolare, se $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$ allora $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 1$ λ-q.o. e μ-q.o..

Dimostrazione.
A meno di considerare separatamente ν^+, ν^- possiamo supporre $\nu \geq 0$. Se $g = \chi_E$ allora, per definizione di $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$, abbiamo

$$\int g \mathrm{d}\nu = \nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu;$$

per linearità, l'uguaglianza sarà vera anche nel caso in cui g è una funzione semplice, applicando poi il Teorema della convergenza monotona possiamo estenderla a ogni funzione misurabile positiva e dividendo infine tra parte positiva e negativa otterremo la formula per funzioni integrabili qualsiasi.
Ripetendo il ragionamento con la coppia μ, λ al posto di ν, μ e $g = \chi_E \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ otteniamo

$$\int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{d}\lambda = \nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{d}\lambda$$

per qualsiasi E misurabile, dunque dovrà essere $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ λ-q.o.. $\square$

Lezioni 45-46 del 14/11/2024

Avendo appena introdotto la derivata di Radon-Nikodym, viene naturale chiedersi il legame con la derivata definita come rapporto incrementale, che può essere facilmente al caso di misure. In altre parole, dimostreremo una sorta di teorema fondamentale del calcolo per misure.

Definizione.
*Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice **localmente integrabile** se $f\chi_E$ è integrabile per ogni misurabile <u>limitato</u> E.*
*Data f localmente integrabile, definiamo la sua **media** sulla palla $B_r(x)$, per $x \in \mathbb{R}^N, r > 0$ come*

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f;$$

*definiamo la **funzione massimale di Hardy-Littlewood** di f come*

$$Hf(x) := \sup_{r>0} A_r|f|(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f|.$$

Proposizione.
Se f è localmente integrabile allora:

1. *$(x, r) \mapsto A_r f(x)$ è <u>continua</u>;*
2. *$x \mapsto Hf(x)$ è <u>misurabile</u> e se f è integrabile su $\mathbb{R}^N$ allora per ogni $a > 0$ vale*

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : Hf(x) > a\right\}\right) \leq \frac{3^N}{a} \int |f| \mathrm{d}m.$$

Esempio.
Se $f = \chi_{[0,\infty)}$ allora $Hf(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$: in particolare, Hf potrebbe <u>non</u> essere continua.

Osservazione.
Sostituendo Hf con f vale una disuguaglianza simile alla precedente, che differisce solo per l'assenza della costante 3^N: infatti,

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > a\right\}\right) = \frac{1}{a} \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > a\}} a \mathrm{d}m \leq \frac{1}{a} \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > a\}} |f| \mathrm{d}m \leq \frac{1}{a} \int |f| \mathrm{d}m.$$

Lemma.
Data una collezione $\mathcal{C}$ di palle in $\mathbb{R}^N$ e $c < m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B\right)$, esiste un sottoinsieme <u>finito</u> e <u>disgiunto</u> $B_1, \ldots, B_M \in \mathcal{C}$ tale che $m\left(\bigcup_{m=1}^{M} m(B_m)\right) > \frac{c}{3^N}$.

Dimostrazione.
Dal Teorema di approssimazione con aperti e compatti, per ogni $c < m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B\right)$ esisterà un compatto $K \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ tale che $m(K) > c$ e, per compattezza, $K \subset \bigcup_{l=1}^{L} A_l$ per un numero finito di palle $A_1, \ldots, A_L \in \mathcal{C}$. Definiamo ora B_1 come la palla che ha il raggio più grande tra le A_l, B_2 come la più grande tra le palle disgiunte da B_1, B_3 la più grande tra quelle disgiunte da B_1 e B_2, e così via. Se una qualche A_l non è tra le B_m allora $A_l \cap B_m \neq \emptyset$ e, prendendo il più piccolo m per cui ciò accade, A_l avrà raggio al più uguale a B_m e cioè $A_l \subset \widetilde{B}_m$, dove $\widetilde{B}_m$ è la palla concentrica con B_m di raggio tre volte più grande; dunque avremo $K \subset \bigcup_{m=1}^{M} \widetilde{B}_m$ e quindi

$$c < m(K) \leq m\left(\bigcup_{m=1}^{M} \widetilde{B}_m\right) = 3^N m\left(\bigcup_{m=1}^{M} m(B_m)\right).$$

$\square$

Dimostrazione della proposizione.

1. Poiché $m(B_r(x)) = m(B_1(0))r^N$ è continua in x, r e non si annulla mai se $r \neq 0$, allora per $x \to x_0$ e $r \to r_0 > 0$ avremo $\dfrac{1}{m(B_r(x))} \to \dfrac{1}{m(B_{r_0}(x_0))}$, e dunque basterà far vedere la continuità di $(x, r) \mapsto \displaystyle\int_{B_r(x)} f\mathrm{d}m$; poiché $\chi_{B_r(x)} \underset{(x,r)\to(x_0,r_0)}{\to} \chi_{B_{r_0}(x_0)}$ puntualmente su $\{y : |y - x_0| \neq r_0\}$, cioè q.o., e inoltre $|f\chi_{B_r(x)}| \leq |f|\chi_{B_{r_0+1}(x_0)}$, che è integrabile, per $r \leq r_0 + \dfrac{1}{2}, |x - x_0| \leq \dfrac{1}{2}$, otterremo la continuità applicando il Teorema della convergenza monotona:
$$\int_{B_r(x)} f\mathrm{d}m \underset{(x,r)\to(x_0,r_0)}{\to} \int_{B_{r_0}(x_0)} f\mathrm{d}m.$$

2. Grazie al punto precedente, Hf è estremo superiore di funzioni continue e dunque misurabile. Fissato $a > 0$ e x tale che $Hf(x) > a$, prendiamo $r_x > 0$ tale che $A_{r_x}|f|(x) > a$ e ricopriamo l'insieme $\{x : Hf(x) > a\}$ con le palle $B_{r_x}(x)$; dal lemma precedente, fissato $c < m(\{Hf > a\})$, esisteranno un numero finito di $B_m = B_{r_{x_m}}(x_m)$ tali che $m\left(\displaystyle\bigcup_{m=1}^{M} B_m\right) > \dfrac{c}{3^N}$ e dunque, poiché su ognuna di queste palle avremo $\displaystyle\int_{B_m} |f| > am(B_m)$, allora
$$c < 3^N m\left(\bigcup_{m=1}^{M} B_m\right) = 3^N \sum_{m=1}^{M} m(B_m) < 3^N \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{a}\int_{B_m} |f|\mathrm{d}m \leq \frac{3^N}{a}\int_{\mathbb{R}^N} |f|\mathrm{d}m,$$
e concludiamo passando al limite per $c \to m(\{Hf > a\})$.

$\square$

Questi preliminari ci permettono di ottenere un importante teorema sulla convergenza delle medie, che generalizza una proprietà elementare dell'integrazione di funzioni continue.

Teorema (di differenziazione di Lebesgue)**.**
Se f è localmente integrabile allora per q.o. x vale:
$$\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\mathrm{d}y \underset{r\to 0}{\to} 0.$$
In particolare, $A_r f(x) \underset{r\to 0}{\to} f(x)$ per q.o. x.

Osservazione.
Se f è continua, allora l'enunciato del Teorema di differenziazione di Lebesgue è vero per ogni x, perché prendendo $\varepsilon, \delta > 0$ tali che $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ si ottiene $\dfrac{1}{m(B_r(x))}\displaystyle\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\mathrm{d}y < \varepsilon$ per $r < \delta$.

Esempio.
Se $f(x) = \chi_{[0,\infty)}$ allora $f(y) = f(x)$ per $x \neq 0, y \in (-x, x)$, dunque $\dfrac{1}{m(B_r(x))}\displaystyle\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\mathrm{d}y \underset{r\to 0}{\to} 0$ per ogni $x \neq 0$, ma $\dfrac{1}{m(B_r(0))}\displaystyle\int_{B_r(x)} |f(y) - f(0)|\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2} \underset{r\to 0}{\not\to} 0$; in particolare, l'enunciato del Teorema di differenziazione di Lebesgue potrebbe non valere per ogni x.

Dimostrazione del Teorema di differenziazione di Lebesgue.

Passo 1 $A_r f(x) \underset{r\to 0}{\to} f(x)$ per q.o. x:

Sarà sufficiente fissare $M \in \mathbb{N}$ e farlo vedere per $|x| \leq M$ e inoltre, poiché $A_r f(x)$ dipende solo dal valore di $f(y)$ per $|y| \leq |x| + r$, posso considerare $f\chi_{B_{M+1}(0)}$ al posto di f e supporre f integrabile su $\mathbb{R}^N$.

Scrivendo

$$\left\{x : A_r f(x) \underset{r\to 0}{\not\to} f(x)\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}, \qquad E_a := \left\{x : \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > a\right\},$$

basterà dimostrare che $m(E_a) = 0$ per ogni $a > 0$. Grazie alle proprietà dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo prendere una funzione continua g tale che $\int |g - f| < \varepsilon$, che grazie all'osservazione precedente verificherà $A_r g(x) \underset{r\to 0}{\to} g(x)$ per ogni x, e dunque

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| &= \limsup_{r\to 0} |A_r(f-g)(x) - (f-g)(x)| \\ &\leq H(f-g)(x) + |f(x) - g(x)|,\end{aligned}$$

quindi per ogni $a > 0$ avremo

$$E_a \subset \left\{H(f-g) > \frac{a}{2}\right\} \cup \left\{|f-g| > \frac{a}{2}\right\},$$

e grazie alla proposizione e all'osservazione precedenti possiamo stimare la misura di questi ultimi insiemi:

$$\begin{aligned}m(E_a) &\leq m\left(\left\{H(f-g) > \frac{a}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{|f-g| > \frac{a}{2}\right\}\right) \\ &\leq 3^N \frac{2}{a} \int |f-g| + \frac{2}{a}\int |f-g| \\ &\leq \frac{2\left(1+3^N\right)\varepsilon}{a},\end{aligned}$$

ma essendo ε arbitrario la misura dovrà essere nulla e dunque la dimostrazione è completa.

Passo 2 Conclusione: Sostituendo f con $|f - q|$, per $q \in \mathbb{Q}$, dal passo precedente avremo

$$\frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - q| \mathrm{d}y \underset{r\to 0}{\to} |f(x) - q|$$

per ogni $x \notin E_q$ con $m(E_q) = 0$; dunque $m\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q\right) = 0$ e, se $x \notin \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$, fissato $\varepsilon > 0$ esisterà $q \in \mathbb{Q}$ con $|f(x) - q| < \varepsilon$, dunque

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y &\leq \limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} (|f(y) - q| + \varepsilon) \mathrm{d}y \\ &= |f(x) - q| + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ma essendo ε arbitrario avremo $\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0$ per ogni $x \notin E$.

□

Lezioni 47-48 del 19/11/2024

Estendiamo ora il Teorema di differenziazione di Lebesgue a misure più generali, aiutandoci con il Teorema di Radon-Nikodym.

Proposizione.
Se ν è una misura finita sui limitati, o misura con segno, di Borel su $\mathbb{R}^N$ scritta secondo la decomposizione di Lebesgue rispetto alla misura di Lebesgue e $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ la sua derivata di Radon-Nikodym. Allora per q.o. x vale:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{m(B_r(x))} = f(x).$$

Dimostrazione.
Scrivendo $\nu = \lambda+\rho$ con $\lambda \perp m$ e $\rho(B_r(x)) = \int_{B_r(x)} f\mathrm{d}m$, dal Teorema di differenziazione di Lebesgue deduciamo che $\frac{\rho(B_r(x))}{m(B_r(x))} \underset{r\to 0}{\to} f(x)$ per q.o. x, e dunque ci basterà far vedere che $\frac{\lambda(B_r(x))}{m(B_r(x))} \underset{r\to 0}{\to} 0$ per q.o. x; essendo poi $|\lambda(B_r(x))| \leq |\lambda|(B_r(x))$, potremmo restringerci al caso $\lambda \geq 0$.
Essendo $\lambda \perp m$, esisterà un boreliano E tale che $\lambda(E) = m(E^c) = 0$, e sarà sufficiente mostrare che i punti di E per cui il limite non è zero ha misura nulla; inoltre, come nella dimostrazione del Teorema di differenziazione di Lebesgue, basterà far vedere che hanno misura nulla gli insiemi del tipo

$$E_a := \left\{x \in E : \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda(B_r(x))}{m(B_r(x))} > a\right\}.$$

Per ogni $x \in E_a$ esisterà $r_x > 0$ tale che $\frac{\lambda(B_{r_x}(x))}{m(B_{r_x}(x))} > a$; λ sarà inoltre regolare per il Teorema di regolarità delle misure, perciò dato $\varepsilon > 0$ esisterà un aperto $A \supset E_a$ tale che $\lambda(A) < \varepsilon$ e inoltre, a meno di diminuire r_x, avremo $\bigcup_{x\in E_a} B_{r_x}(x) \subset A$. Applicando ora il lemma precedente a $\bigcup_{x\in E_a} B_{r_x}(x)$, per ogni $c < m\left(\bigcup_{x\in E_a} B_{r_x}(x)\right)$ troviamo $B_{r_{x_1}}(x_1), \ldots, B_{r_{x_M}}(x_M)$ disgiunte tali che

$$c < 3^N \sum_{m=1}^{M} m\left(B_{r_{x_m}}(x_m)\right) < \frac{3^N}{a} \sum_{m=1}^{M} \lambda\left(B_{r_{x_m}}(x_m)\right) \leq \frac{3^N}{a}\lambda\left(\bigcup_{x\in E_a} B_{r_x}(x)\right) \leq \frac{3^N}{a}\lambda(A) \leq \frac{3^N}{a}\varepsilon,$$

da cui $m(E_a) \leq m\left(\bigcup_{x\in E_a} B_{r_x}(x)\right) \leq \frac{3^N}{a}\varepsilon$, e mandando ε a zero si ottiene $m(E_a) = 0$. $\square$

Applicheremo ora i risultati teorici sulla differenziazione di misure alle misure di Lebesgue-Stieltjes associate a una funzione crescente e continua a destra.

Proposizione.
Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è <u>crescente</u> e $G(x) := \lim_{y\searrow x} F(y)$, allora:

1. *L'insieme di punti di discontinuità di F è numerabile, in particolare F è continua q.o. e $F = G$ q.o..*
2. *F e G sono differenziabili q.o.. e $F' = G'$ q.o..*

Esempio.

1. *La funzione di Cantor F è continua su $[0,1]$, e dunque $F = G$, e inoltre $F' = 0$ q.o., perché F è costante su ogni intervallo di $[0,1] \setminus C$, quindi $F' = 0$ su $[0,1] \setminus C$, che ha misura piena.*
2. *La funzione $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{[q_n,\infty)}$, dove $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una numerazione di $\mathbb{Q}$, è strettamente crescente, perché dati x, y con $x < y$ esisterà $q_N \in (x, y)$ e dunque $F(y)-F(x) \geq \frac{1}{2^N} > 0$; inoltre,*

è continua su $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *perché, essendo totalmente convergente,* $\lim_{y\to x}F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{y\to x}\frac{1}{2^n}\chi_{[q_n,\infty)}(y)$, *che coinciderà con* x *se e solo se* $x\neq q_n$ *per ogni* n*. In particolare, l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione crescente potrebbe essere denso.*

Dimostrazione della proposizione.

1. Essendo F crescente, per ogni x in cui F non è continua gli intervalli $\left(\lim_{y\nearrow x}F(y),\lim_{y\searrow x}F(y)\right)$ sono non vuoti e disgiunti, dunque ogni numero razionale apparterrà al più ad uno di questi intervalli, che avranno quindi cardinalità al più pari a quella di $\mathbb{Q}$ e cioè saranno numerabili.

2. Essendo G crescente e continua a destra per costruzione, possiamo considerare la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_G associata a G, che verifica $G(x+h)-G(x)=\begin{cases}\mu_G((x,x+h]) & \text{se } h>0\\ -\mu_G((x+h,x]) & \text{se } h<0\end{cases}$: essendo finita sui limitati, dal Teorema di regolarità delle misure sarà regolare e dunque, scrivendo $\mu_G=\int f\mathrm{d}m+\lambda$ come decomposizione di Lebesgue, dalla proposizione precedente per $h>0$ otterremo
$$\frac{\lambda((x,x+h])}{h}\leq 4\frac{\lambda((x-2h,x+2h))}{m((x-2h,x+2h))}\underset{h\to 0^+}{\to}0,$$
per q.o. x, mentre dal Teorema di differenziazione di Lebesgue analogamente otterremo
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{(x,x+h]}f-f(x)\right| &\leq \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y\\ &\leq \frac{4}{m((x-2h,x+2h))}\int_{(x-2h,x+2h)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y\\ &\underset{h\to 0^+}{\to} 0\end{aligned}$$
per q.o. x; da ciò deduciamo $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{(x,x+h]}f+\frac{\lambda((x,x+h])}{h}\underset{h\to 0^+}{\to}f(x)$ e analogamente per $h\to 0^-$, cioè $G'=f$ q.o..
Infine, la funzione $H:=G-F$ è diversa da zero solo per numerabili $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, per i quali $H(x_n)>0$ e, per ogni $M\in\mathbb{N}$, $\sum_{-M\leq x_n\leq M}H(x_n)<\infty$, cioè $\mu:=\sum_{n=1}^{\infty}H(x_n)\delta_{x_n}$ è finita sui limitati; inoltre, $\mu\perp m$ perché $m\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\mu\left({\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}^c\right)=0$, dunque in modo simile al punto precedente si ottiene
$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right|\leq\frac{H(x+h)+H(x)}{|h|}\leq\frac{\mu(\{x,x+h\})}{\frac{m((x-2|h|,x+2|h|))}{4}}\leq 4\frac{\mu((x-2|h|,x+2|h|))}{m((x-2|h|,x+2|h|))}\underset{h\to 0}{\to}0.$$
per q.o. x, e cioè $H'=0$ q.o..

□

Introduciamo ora una nuova classe di funzioni, che sarà legata alle misure con segno allo stesso modo in cui le funzioni crescenti continue continue a destra sono legate alle misure positive.

Definizione.
Data $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *e* $x\in\mathbb{R}$ *definiamo la* ***variazione totale*** *di* F *in* x *come*
$$T_F(x):=\sup\left\{\sum_{n=1}^{N}|F(x_n)-F(x_{n-1})|:\,N\in\mathbb{N},\,x_0<\cdots<x_n=x\right\}.$$
F *si dice a* ***variazione limitata*** *su* $\mathbb{R}$ *se* $\lim_{x\to\infty}T_F(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}}T_F(x)<\infty$ *e si indica con* $F\in BV$*.*
Preso un intervallo chiuso $[a,b]$*, la variazione totale di* F *su* $[a,b]$ *è*
$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{N}|F(x_n)-F(x_{n-1})|:\,N\in\mathbb{N},\,a=x_0<\cdots<x_n=x\right\}.$$

F si dice a variazione limitata su $[a, b]$ se la sua variazione totale su $[a, b]$ è finita e si indica con $F \in BV([a, b])$.

Lezioni 49-50 del 21/11/2024

Osservazione.

1. *Se $F \in BV$ allora $T_F(x) \geq 0$ per ogni x e T_F è crescente; inoltre, $T_F(x) > 0$ a meno che F non sia costante in $(-\infty, x]$ e T_F è strettamente crescente su ogni intervallo in cui F non è costante.*

2. *Prendendo come partizione $x_0 < x_1 = x$ si ottiene che $|F(x)| \leq |F(x_0)| + |F(x) - F(x_0)| \leq |F(x_0)| + |T_F(x)|$ per ogni x, x_0, dunque in particolare le funzioni a variazione limitata solo limitate.*

Esempio.

1. *Se F è crescente, allora $T_F(x) = F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$ e dunque $F \in BV$ se e solo se è limitata; in particolare, se $F \in BV$ allora anche $T_F \in BV$.*

2. *Se F è Lipschitz, e in particolare se $F \in C^1$, allora $F \in BV([a, b])$ per ogni a, b e la sua variazione totale su $[a, b]$ è più piccola di $(b - a)\|F\|_{\mathrm{Lip}}$. F potrebbe non essere a variazione limitata su $\mathbb{R}$: grazie all'esempio precedente, una funzione Lipschitz crescente e illimitata non sarà a variazione limitata.*

3. $F(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *, pur essendo continua, non è a variazione limitata su $[a, b]$ se $a \leq 0 \leq b$, perché scegliendo $x_n = \pm \dfrac{1}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}$ si ottiene*

$$\sum_{n=1}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| = \sum_{n=1}^{N} (|x_n| + |x_{n-1}|) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) \underset{N\to\infty}{\to} \infty;$$

allo stesso modo, sarà continua ma non a variazione limitata la funzione $\begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *con $0 < \alpha \leq 1$. Viceversa, una funzione crescente e limitata ma discontinua, come ad esempio la funzione caratteristica di una semiretta $\chi_{[x_0,\infty)}$, pur non essendo continua sarà a variazione limitata su $\mathbb{R}$.*

4. *Una combinazione lineare $aF + bG$ di funzioni $F, G \in BV$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è anch'essa a variazione limitata; inoltre, se $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lipschitz allora $H \circ F \in BV$, dunque in particolare anche $|F|, F^\pm, \max\{F, G\}, \min\{F, G\} \in BV$.*

Proposizione.

1. *Se $F \in BV$ allora $T_F + F$ e $T_F - F$ sono crescenti.*

2. *Una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere scritta come differenza di due funzioni crescenti limitate se e solo se $F \in BV$, e in questo caso si può scegliere come funzioni $\dfrac{T_F \pm F}{2}$; in particolare, le funzioni a variazione limitata sono differenziabili q.o..*

3. *Se $F \in BV$ allora $\lim_{x\to-\infty} T_F(x) = 0$.*

4. *Se $F \in BV$ è continua a destra, lo è anche T_F.*

Dimostrazione della Proposizione.

1. Poiché $T_{-F} = T_F$ e F è a variazione limitata se e solo se lo è $-F$, sarà sufficiente mostrare che $T_F + F$ è crescente. Dati $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, prendiamo $x_0 < \cdots < x_N = x$ tali che

$\sum_{n=1}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq T_F(x) - \varepsilon$; allora per $y > x$ possiamo approssimare $T_F(y)$ scegliendo $x_0 < \cdots < x_N < x_{N+1} = y$ e dunque

$$\begin{aligned} T_F(y) + F(y) &\geq \sum_{n=1}^{N+1} |F(x_n) - F(x_{n-1})| + F(y) \\ &\geq T_F(x) - \varepsilon + |F(y) - F(x)| + F(y) \\ &\geq T_F(x) - \varepsilon + F(x), \end{aligned}$$

quindi $T_F(y) + F(y) \geq T_F(x) + F(x)$.

2. Grazie agli esempi precedenti, le funzioni crescenti e limitate sono a variazione limitata e anche una qualsiasi combinazione lineare, dunque in particolare una differenza. Viceversa, possiamo scrivere $F = \left(\frac{T_F + F}{2}\right) - \left(\frac{T_F - F}{2}\right)$ e dal punto precedente le funzioni $\frac{T_F \pm F}{2}$ sono crescenti; inoltre, T_F è limitata perché $F \in BV$ e F stessa è limitata per una precedente osservazione, dunque sono limitate anche $\frac{T_F \pm F}{2}$.

3. Fissati $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, troviamo $x_0 < \cdots < x_N = x$ tali che $\sum_{n=1}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq T_F(x) - \varepsilon$; dati poi $y_0 < \cdots < y_M = x_0$, la partizione $y_0 < \cdots < y_M < x_1 < \cdots < x_N$ finisce in x_0, dunque

$$T_F(x) \geq \sum_{n=1}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| + \sum_{m=1}^{M} |F(y_m) - F(y_{m-1})| \geq T_F(x) - \varepsilon + \sum_{m=1}^{M} |F(y_m) - F(y_{m-1})|$$

e cioè, passando all'estremo superiore sulle $y_1 < \cdots < y_N$, otteniamo $T_F(x_0) < \varepsilon$. Essendo poi T_F positiva e crescente, avremo $0 \leq T_F(y) < \varepsilon$ se $y \leq x_0$, cioè $T_F(y) \underset{y \to -\infty}{\to} 0$.

4. Posto $\alpha := \lim_{y \searrow x} T_F(y) - T_F(x) \geq 0$, sarà sufficiente mostrare che $\alpha = 0$. Se F è continua a destra, presi $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ esisterà $\delta > 0$ tale che per $0 < h < \delta$ avremo $|F(x+h) - F(x)| < \varepsilon$ e $0 \leq T_F(x+h) - \lim_{y \searrow x} T_F(y) < \varepsilon$; esisteranno poi $x = x_0 < \cdots < x_N = x + h$ tali che

$$\sum_{n=1}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq T_F(x+h) - T_F(x) - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon.$$

Inoltre, essendo $x < x_1 < x + \delta$, avremo anche

$$\sum_{n=2}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \geq \alpha - \varepsilon - |F(x_1) - F(x)| \geq \alpha - 2\varepsilon,$$

e dunque prendendo $x = y_0 < \cdots < y_M = x_1$ tale che

$$\sum_{m=1}^{M} |F(y_m) - F(y_{m-1})| \geq T_F(x_1 + h) - T_F(x) - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon,$$

scegliendo la partizione $x = y_0 < \cdots < y_M = x_1 < \cdots < x_N = x + h$ avremo

$$2\alpha - 3\varepsilon \leq \sum_{m=1}^{M} |F(y_m) - F(y_{m-1})| + \sum_{n=2}^{N} |F(x_n) - F(x_{n-1})| \leq T_F(x+h) - T_F(x) \leq \alpha + \varepsilon,$$

cioè $\alpha \leq 4\varepsilon$ e dunque $\alpha = 0$.

$\square$

Corollario.
Se $F \in BV$ allora è continua tranne al più su un insieme numerabile, è derivabile quasi ovunque, e inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, esistono finiti i limiti

$$\lim_{y \searrow x} F(y), \qquad \lim_{y \nearrow x} F(y), \qquad \lim_{y \to -\infty} F(y), \qquad \lim_{y \to \infty} F(y).$$

In particolare, lo spazio delle funzioni a variazione limitata ha come norma $\|F\|_{BV} := \lim_{x \to \infty} T_F(x) + \lim_{x \to -\infty} |F(x)|$.

Ci soffermeremo ora sul legame tra funzioni a variazione limitata e misure con segno, legame forse già intuibile dalla terminologia utilizzata.

Definizione.
*Data $F \in BV$, la coppia $\dfrac{T_F + F}{2}, \dfrac{T_F - F}{2}$ si chiama **decomposizione di Jordan**; $\dfrac{T_F \pm F}{2}$ si chiamano rispettivamente **variazione positiva** e **variazione negativa** di F.*
*Una funzione a variazione limitata si dice **normalizzata** se è continua a destra e $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e si indica con $F \in NBV$.*

Osservazione.

1. *NBV è un sottospazio lineare di BV, in cui la norma si può scrivere come $\|F\|_{BV} = \lim_{x \to \infty} |T_F(x)|$.*

2. *Data $F \in BV$, una funzione a variazione limitata normalizzata sarà data da $G(x) := \lim_{y \searrow x} F(y) - \lim_{y \to -\infty} F(y)$ e sarà uguale a F a meno una costante e $G' = F'$ q.o.: anzitutto i due limiti che definiscono G esistono perché $F = F_1 - F_2$ è differenza di funzioni crescenti limitate, e inoltre $G(x) = \lim_{y \searrow x} F_1(y) - \left(\lim_{y \searrow x} F_2(y) + \lim_{y \to -\infty} F(y) \right)$ è anch'essa differenza di funzioni crescenti limitate e quindi è in BV e dunque NBV perché per costruzione è continua a destra e va a 0 a $-\infty$; infine, l'uguaglianza tra F e G segue dal fatto che F è differenza di funzioni non decrescenti e dalla proposizione sulle funzioni non decrescenti.*

Lezioni 51-52 del 22/11/2024

Proposizione.

1. *Data una misura con segno di Borel ν, $F(x) := \nu((-\infty, x]) \in NBV$; viceversa, data $F \in NBV$ esiste un'unica misura con segno di Borel ν_F tale che $F(x) = \nu_F((-\infty, x])$, e inoltre $|\nu_F| = \nu_{T_F}$.*

2. *Se $F \in NBV$ allora F' è integrabile rispetto a m; inoltre, $\nu_F \perp m$ se e solo se $F' = 0$ q.o. e $\nu_F \ll m$ se e solo se $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} F'(t)\mathrm{d}t$ per ogni x.*

Osservazione.

1. *Questo risultato fornisce una corrispondenza biunivoca $\nu \leftrightarrow F$ tra misure con segno ν su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e funzioni $F \in NBV$; questa biiezione è lineare e preserva le norme nei rispettivi spazi.*

2. *Grazie all'osservazione precedente, deduciamo che anche tutte le funzioni a variazione limitata sono derivabili q.o. con derivata integrabile, e in particolare lo sono tutte le funzioni Lipschitz in quanto a variazione limitata su ogni intervallo limitato; queste ultime, avendo per definizione rapporti incrementali uniformemente limitati, sono dunque caratterizzate dal fatto di essere derivabili quasi ovunque con derivata limitata.*

Dimostrazione della proposizione.

1. Se $\nu = \nu^+ - \nu^-$ è una misura con segno scritta in decomposizione di Jordan, allora $F^{\pm}(x) := \nu^{\pm}((-\infty, x])$ è crescente e continua a destra e inoltre $\lim\limits_{x\to-\infty} F^{\pm}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} F^{\pm}(x) = \nu^{\pm}(\mathbb{R}) < \infty$ e dunque $F = F^+ - F^-$ è differenza di funzioni crescenti limitate e inoltre è continua a destra e tende a 0 a $-\infty$, dunque è a variazione limitata normalizzata; viceversa, se $F \in NBV$ allora $F = \dfrac{T_F + F}{2} - \dfrac{T_F - F}{2}$ con $\dfrac{T_F \pm F}{2}$ crescenti, limitate e continue a destra, dunque dal Teorema di costruzione delle misure di Borel avremo $\dfrac{T_F(x) \pm F(x)}{2} = \nu_{\pm}((-\infty, x])$ per opportune misure di Borel finite $\nu_{\pm}$ e cioè $F(x) = \nu_F((-\infty, x])$ con $\nu_F = \nu_+ - \nu_-$. Infine, avremo
$$T_F(x) = \frac{T_F(x) + F(x)}{2} + \frac{T_F(x) - F(x)}{2} = \nu_+((-\infty, x]) + \nu_-((-\infty, x]) = |\nu_F|((-\infty, x])$$
e cioè $|\nu_F| = \nu_{T_F}$.

2. Scrivendo $\nu_F = fm + \lambda$ come decomposizione di Lebesgue, avremo, come nelle dimostrazioni precedenti, $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\nu_F((x, x+h])}{h} \underset{h\to 0^+}{\to} f(x)$ per q.o. x, e analogamente per $h \to 0^-$; quindi $F' = f$ q.o. ed in particolare è integrabile. Scrivendo infine $\nu_F = F'm + \lambda$, nel caso singolare avremo $\nu_F = \lambda$ se e solo se $F' = 0$ q.o. mentre nel caso assolutamente continuo calcolando in $(-\infty, x]$ otterremo $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f\mathrm{d}m$.

□

Definizione.
*Una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni unione disgiunta $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ di intervalli si ha*
$$\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{N}|F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon,$$
*e si indica con $F \in AC$. F si dice **assolutamente continua** su $[a, b]$ se la condizione precedente è soddisfatta quando gli intervalli $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ sono contenuti in $[a, b]$, e si indica con $F \in AC([a, b])$.*

Osservazione.
Se f è assolutamente continua allora è anche uniformemente continua, come segue prendendo un solo intervallo nella definizione.

Esempio.

1. *Una funzione* <u>*Lipschitz*</u>*, e in particolare una funzione derivabile con derivata limitata, è assolutamente continua: se K è la sua costante di Lipschitz, dato ε è sufficiente prendere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$ nella definizione.*

2. *La funzione di Cantor F* <u>*non*</u> *è assolutamente continua: infatti, poiché l'insieme di Cantor C ha misura nulla, per ogni $\delta > 0$ è possibile scegliere un aperto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, scritto come unione disgiunta, di misura $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$ tale che $C \subset \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n)$ ma $\sum_{n=1}^{\infty}|F(b_n) - F(a_n)| = 1$, perché F è costante su ogni intervallo di $[0,1] \setminus C$, dunque passando ad un'opportuna unione finita avremo*
$$\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) < \delta, \qquad \sum_{n=1}^{N}|F(b_n) - F(a_n)| \geq \frac{1}{2};$$
in particolare, non tutte le funzioni uniformemente continue sono assolutamente continue.

Proposizione.

1. *Se $F \in AC([a,b])$ allora $F \in BV([a,b])$.*

2. *Se $F \in NBV$ allora $F \in AC$ se e solo se $\nu_F \ll m$. In particolare, data f integrabile abbiamo $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f\mathrm{d}m \in NBV \cap AC$; viceversa, se $F \in NBV \cap AC$ allora F' è integrabile e valgono:*
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'\mathrm{d}m, \qquad T_F(x) = \int_{-\infty}^{x} |F'|\mathrm{d}m.$$

Osservazione.
La proposizione ci dà ulteriori informazioni sulla corrispondenza biunivoca tra misure con segno e funzioni a variazione limitata normalizzate: il sottospazio delle misure con segno $\nu \ll m$ assolutamente continue è in corrispondenza biunivoca con le funzioni $F \in NBV \cap AC$, e la norma su quest'ultimo spazio è $\|F\| = \int_{-\infty}^{\infty} |F'|\mathrm{d}m$.

Esempio.
Una funzione periodica di classe C^1 non costante è assolutamente continua, in quanto Lipschitz, ma non è a variazione limitata; in particolare, $AC \not\subset BV$.

Dimostrazione della proposizione.

1. Data $F \in AC([a,b])$ prendiamo δ corrispondente a $\varepsilon = 1$ nella definizione di continuità assoluta; fissando poi $a = x_0 < \cdots < x_N = b$, suddivideremo gli intervalli (x_{n-1}, x_n) in M gruppi $\{(x_{n-1}, x_n)\}_{n=N_m+1}^{N_{m+1}}$ per opportuni $1 = N_1, \ldots, N_M = N$, con $M = \left\lfloor \dfrac{b-a}{\delta} \right\rfloor + 1$, in modo che, a meno di raffinare la partizione, $\sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}}(x_n - x_{n-1}) < \delta$. Dunque $\sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1}|F(x_n) - F(x_{n-1})| < 1$ e quindi $\sum_{n=1}^{N}|F(x_n) - F(x_{n-1})| < M \leq \dfrac{b-a}{\delta} + 1$, cioè $T_F(b) - T_F(a) \leq \dfrac{b-a}{\delta} + 1 < \infty$.

2. Se $\nu_F \ll m$ allora l'assoluta continuità segue applicando la proposizione che caratterizza le misure assolutamente continue alle unioni disgiunte di intervalli semi-aperti $E = \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n]$, perché $m(E) = \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) < \delta$ e $|\nu_F(E)| \leq \sum_{n=1}^{N}|\nu_F((a_n, b_N]| < \varepsilon$. Viceversa, se $F \in NBV \cap AC$, allora anche $T_F \in NBV \cap AC$ perché, se $\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) < \delta$ allora $\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(x_{n,m} - x_{n,m-1})$ per ogni partizione $a_n = x_{n,0} < \cdots < x_{n,M} = b_n$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{N}(T_F(b_n) - T_F(a_n)) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}|F(x_{n,m}) - F(x_{n,m-1})| : a_n = x_{n,0} < \cdots < x_{n,M} = b_n\right\} < \varepsilon;$$

preso un boreliano E di misura $m(E) = 0$, dal Teorema di approssimazione con aperti e compatti troveremo un aperto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ tale che $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$; per ogni $N \in \mathbb{N}$ avremo

$$\sum_{n=1}^{N}|\nu_F|((a_n, b_n)) \leq \sum_{n=1}^{N}|\nu_F|((a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{N}|T_F(b_n) - T_F(a_n)| < \varepsilon,$$

dunque passando al limite per $N \to \infty$ otterremo $|\nu_F|(E) \leq |\nu_F|(A) < \varepsilon$ e cioè $\nu_F(E) = 0$, quindi $\nu_F \ll m$.

$\square$