AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi su spazi di Hilbert e Teorema di Hahn-Banach

Esercizio 1.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme bilanciato, cioè tale che $x \in \Omega \iff -x \in \Omega$, sia $H := L^2(\Omega)$ e siano E, F i seguenti sottospazi:

$$\begin{aligned} E &:= \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}, \\ F &:= \{f \in H : f(x) = -f(-x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

1. *Dimostrare che $F \subset E^\perp$, dove l'ortogonalità è intesa rispetto al prodotto scalare $(f, g) := \int_\Omega fg$.*
2. *Fissata $f \in H \setminus F$, trovare $g \in E$ tale che $f \not\perp g$ e dedurne che $F = E^\perp$.*
3. *Dando per buono che $E \lhd H$ e utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che $E = F^\perp$.*

Esercizio 2.
Sia H uno spazio di Hilbert, $K \subset H$ un suo sottoinsieme chiuso e convesso e $P : H \to K$ la sua proiezione.

1. *Dimostrare che, se $x \in K$, allora $P(x) = x$.*
2. *Dimostrare che, fissati $x \in H \setminus K$ e $y \in K$, la distanza tra x e il punto $(1-t)x + ty$ è strettamente crescente per $t \in [0, 1]$.*
3. *Dedurre dal punto precedente che, se $x \in H \setminus K$ e $y \in \mathring{K}$, allora esiste un altro $z \in K$ per cui $\|z - x\| < \|y - x\|$, e dunque $P(x) \in \partial K$.*
4. *Siano ora $h \in H \setminus \{0\}$ e $E := \{x \in H : (x, h) = 0\}$. Scrivendo, per ogni $x \in H$, $x = x - \frac{(x,h)}{\|h\|^2} + \frac{(x,h)}{\|h\|^2}$, dimostrare che la proiezione su E è data da $x \mapsto x - \frac{(x,h)}{\|h\|^2}$.*
5. *Utilizzando i punti precedenti, dimostrare che la proiezione sul chiuso convesso $K := \{x \in H : (x, h) \geq 0\}$ è data da:*

$$P(x) = \begin{cases} x & \text{se } (x,h) \geq 0 \\ x - \frac{(x,h)}{\|h\|^2} & \text{se } (x,h) < 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.
Sia $H := \ell_2$ e $E \lhd H$ definito da:

$$E := \{x \in X : x(2k+1) = x(2k+2)\, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

1. *Trovare un sistema ortonormale completo per E.*

2. *Dimostrare che il suo ortogonale è dato da*

$$F := \{x \in X : x(2k+1) = -x(2k+2)\, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

e trovare un sistema ortonormale completo per F.

3. *Scrivere esplicitamente un'isometria suriettiva $\Phi : E \to H$.*

Esercizio 4.
Sia $X = L^1([0,1])$ e $L \in X^*$ dato da $L : f \mapsto \int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x$.

1. *Dimostrare che $\|L\|_{X^*} = 1$.*
2. *Dimostrare che vale la disuguaglianza stretta $|Lf| < \|f\|_X$ per ogni $f \in X \setminus \{0\}$.*
3. *Utilizzando i punti precedenti e un corollario del Teorema di Hahn-Banach, dedurre una dimostrazione alternativa del fatto che X non è riflessivo.*

Esercizio 5.
Sia $X = \ell_1$ e $A, B \subset X$ i seguenti sottoinsiemi chiusi convessi

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ x \in X : x(k) \geq 0\, \forall k \in \mathbb{N},\, x(1) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} x(k) \right) \geq 1 \right\}, \\ B &:= \{x \in X : x(1) \leq 0\}. \end{aligned}$$

1. *Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ esiste $x \in A$ che verifica $x(1) = \alpha$.*
2. *Dimostrare che per ogni $\alpha < 0$ esiste $x \in B$ che verifica $x(1) = \alpha$.*
3. *Dimostrare che, se $y \notin \mathrm{Span}\{e_1\}$ allora $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$ assume qualsiasi valore al variare di $x \in B$, cioè per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $x \in B$ tali che $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k) = \alpha$.*
4. *Utilizzando i punti precedenti, dimostrare che l'unico iperpiano che separa A, B è $\{x(1) = 0\}$ e dedurne che i due insiemi non sono strettamente separati.*