AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi su spazi di Hilbert

Esercizio 1.
Sia $H := L^2((-1,1))$ *e siano* P, D *i sottospazi delle funzioni rispettivamente pari e dispari:*

$$\begin{aligned} P &:= \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\}, \\ D &:= \{f \in H : f(x) = -f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\}. \end{aligned}$$

1. *Dimostrare che* $D \subset P^\perp$*, dove l'ortogonalità è intesa rispetto al prodotto scalare* $(f,g) := \int_{-1}^{1} fg$.
2. *Fissata* $f \in H \setminus D$*, trovare* $g \in P$ *tale che* $f \not\perp g$ *e dedurne che* $D = P^\perp$.
3. *Dando per buono che* $P \lhd H$ *e utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che* $P = D^\perp$.

Esercizio 2.
Sia (X, Σ, μ) *uno spazio misura,* $H := L^2(\mu)$ *il relativo spazio* L^2*,* $h \in H$ *fissata e* K_h *il chiuso convesso definito da*

$$K_h := \{f \in H : f(x) \leq h(x) \text{ per q.o. } x \in X\}.$$

1. *Dimostrare che, per ogni* $f \in H$*,* $\min\{f, h\}$ *verifica*

$$\int_X (\min\{f,h\} - f)(\min\{f,h\} - g) d\mu \leq 0 \qquad \forall g \in K_h.$$

2. *Utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che la proiezione* $P : H \to K_h$ *è data da* $P(f) = \min\{f, h\}$.
3. *Dimostrare esplicitamente che* $\|P(f) - P(g)\| \leq \|f - g\|$ *per ogni* $f, g \in H$.

Esercizio 3.
Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ *la palla unità,* $H := L^2(B)$ *e sia* $E \lhd H$ *il sottospazio delle funzioni radiali:*

$$E := \{f \in H : f(x) = f(y) \text{ per q.o. } x, y \in B \text{ tali che } |x| = |y|\}.$$

1. *Dimostrare che l'ortogonale di* E *è dato da*

$$E^\perp = \left\{ g \in H : \int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x) \mathrm{d}\sigma(x) = 0 \text{ per q.o. } r \in (0,1) \right\}.$$

2. *Dimostrare che per ogni* f *vale*

$$f(x) - \frac{1}{|\{y : |y| = |x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y) \mathrm{d}\sigma(y) \in E^\perp.$$

Dedurne una scrittura esplicita per le proiezioni ortogonali $P : H \to E$*,* $Q : H \to E^\perp$.

Esercizio 4.

Sia H uno spazio di Hilbert, $\{e_1, \dots, e_N\}$ un sistema ortonormale su H e siano, per $x \in H$,

$$Px := \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i, \qquad\qquad Qx := x - Px.$$

1. *Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Bessel, che $\|Px\| \leq \|x\|$.*
2. *Dimostrare che $Qx \perp e_i$ per ogni $x \in H, i = 1, \dots, N$ e dedurne che P, Q sono le proiezioni ortogonali rispettivamente su $E := \mathrm{Span}\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ e sul suo ortogonale.*

Esercizio 5.

Sia $H := L^2([0,1])$ e siano, per $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in H$ definite da:

$$e_n(x) = \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^i \chi_{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)}(x) = \begin{cases} 1 & \dfrac{2j}{2^n} \leq x < \dfrac{2j+1}{2^n} \text{ per qualche } j = 0, \dots, 2^{n-1}+1 \\ -1 & \dfrac{2j+1}{2^n} \leq x < \dfrac{2j+2}{2^n} \text{ per qualche } j = 0, \dots, 2^{n-1}+1 \end{cases}$$

1. *Dimostrare che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale su H.*
2. *Dimostrare che se $f(1-x) = f(x)$ allora $f \perp e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dedurne che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è completo.*