AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi sul Teorema di Hahn-Banach

Esercizio 1.
Sia H uno spazio di Hilbert, $E \lhd H$ e $L \in E^* \setminus \{0\}$. Fissati $x_0 \in E^\perp$ tale che $\|x_0\| = 1$ e $c \in \mathbb{R}$, definiamo $\widetilde{L} \in \mathrm{Span}\{E, x_0\}^*$ come

$$\widetilde{L}(x + tx_0) = Lx + ct.$$

1. *Fissato $x \in E$ per cui $Lx \neq 0$, trovare il valore massimo di $t \mapsto \dfrac{\left(\widetilde{L}(x+tx_0)\right)^2}{\|x+tx_0\|^2}$.*

Soluzione: *Per definizione di $\widetilde{L}$ e per l'ortogonalità $x \perp x_0$ abbiamo*

$$f(t) := \frac{\left(\widetilde{L}(x+tx_0)\right)^2}{\|x+tx_0\|^2} = \frac{(Lx+ct)^2}{\|x\|^2+t^2}.$$

Calcolando $f'(t) = \dfrac{2(Lx+ct)\left(c\|x\|^2 - tLx\right)}{\left(\|x\|^2+t^2\right)^2}$, otteniamo che si annulla se $t = -\dfrac{Lx}{c}$ e $t = \dfrac{c\|x\|^2}{Lx}$; il primo valore è anche l'unico zero di f, che per ogni altro valore è positiva, e dunque sarà un minimo, pertanto avremo

$$\max_t f = f\left(\frac{c\|x\|^2}{Lx}\right) = \frac{(Lx)^2}{\|x\|^2} + c^2$$

2. *Dimostrare che se $c \neq 0$ allora $\left\|\widetilde{L}\right\| > \|L\|$ e dedurne che esiste un'unica estensione di L a H che ne preservi la norma.*

Soluzione: *Dal punto precedente, se $c > 0$ abbiamo*

$$\left\|\widetilde{L}\right\|^2 = \sup_{x\in E, t\in\mathbb{R}} \frac{\left(\widetilde{L}(x+tx_0)\right)^2}{\|x+tx_0\|^2} = \sup_{x\in E}\left(\frac{(Lx)^2}{\|x\|^2} + c^2\right) = \|L\|^2 + c^2 > \|L\|^2,$$

e dunque $\left\|\widetilde{L}\right\| > \|L\|$. Pertanto, l'unica estensione $\widetilde{L} \in \mathrm{Span}\{E, x_0\}^*$ di L che abbia la stessa norma è $\widetilde{L}(x+tx_0) = Lx$, dunque l'unico modo per estendere a $\widetilde{L} \in X^*$ mantenendone la norma è $\widetilde{L}(x+y) = Lx$ per ogni $x \in E, y \in E^\perp$, ovvero $\widetilde{L}x = LPx$ dove $P \in \mathcal{L}(X, E)$ è la proiezione ortogonale.

Esercizio 2.
Sia X uno spazio normato e siano A, B convessi con interno disgiunto.

1. *Utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che $\mathring{A}$ e $\mathring{B}$ sono separati da un iperpiano chiuso.*

Soluzione: *Essendo A, B convessi, lo saranno anche $\mathring{A}, \mathring{B}$; inoltre, per ipotesi abbiamo $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$, ed essendo entrambi aperti possiamo applicare la I forma fondamentale di Hahn-Banach per ottenere che sono separati da un iperpiano chiuso.*

2. *Dimostrare che A e B sono separati da un iperpiano chiuso.*

Soluzione: *Dal punto precedente, esistono $L \in X^* \backslash \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ per cui $Lx \leq \alpha \leq Ly$ per ogni $x \in \mathring{A}, y \in \mathring{B}$. Essendo poi A convesso, avremo $\overline{\mathring{A}} = \overline{A} \supset A$, dunque per la continuità di L possiamo estendere la disuguaglianza $Lx \leq \alpha$ su $\overline{\mathring{A}}$ e in particolare per $x \in A$; ragionando allo stesso modo su B, otterremo $Ly \geq \alpha$ per ogni $y \in B$, e dunque l'iperpiano chiuso $\{L = \alpha\}$ separa anche A e B.*

Esercizio 3.
Sia X uno spazio normato, $K \subset X$ chiuso convesso e H_K l'intersezione di tutti i semi-spazi chiusi contenenti K, ovvero:

$$H_K := \bigcap_{(L,\alpha)\in\mathcal{A}} \{L \geq \alpha\}, \qquad \mathcal{A} := \{(L,\alpha) \in X^* \times \mathbb{R} :\, Lx \geq \alpha \,\forall x \in K\}.$$

1. *Dimostrare che, se $x_0 \notin K$ allora esiste $(L,\alpha) \in \mathcal{A}$ per cui $x_0 \notin \{L \geq \alpha\}$.*

Soluzione: *Se $x_0 \notin K$ allora per la II forma geometrica di Hahn-Banach $\{x_0\}$ e K sono strettamente separati, cioè esistono L, α per cui $Lx_0 < \alpha < Lx$ per ogni $x \in K$; la prima disuguaglianza equivale a dire che $x_0 \notin \{L \geq \alpha\}$, la seconda implica $(L,\alpha) \in \mathcal{A}$.*

2. *Utilizzando il punto precedente dimostrare che $K = H_K$.*

Soluzione: *Poiché, per definizione di $\mathcal{A}$, $K \subset \{L \geq \alpha\}$ per ogni $(L,\alpha) \in \mathcal{A}$, allora $K \subset H_K$; inoltre, dal punto precedente abbiamo che $X \setminus K \subset X \setminus H_K$ e dunque $K = H_K$*

3. *Dimostrare che, per un generico $Y \subset X$, H_Y coincide con la chiusura dell'inviluppo convesso di Y, ovvero:*

$$\overline{\mathrm{conv}(Y)} = \bigcap_{K\in\mathcal{K}} K, \qquad \mathcal{K} = \{K \subset X : K \text{ chiuso convesso tale che } Y \subset K\}.$$

Soluzione: *Poiché l'inclusione $Y \subset H_K$ è sempre valida, come dimostrato al punto precedente, e $H_K \in \mathcal{K}$, in quanto intersezione di chiusi convessi, allora $\overline{\mathrm{conv}(Y)} \subset H_K$. Per mostrare l'inclusione opposta, notiamo che $Y \subset \{L \geq \alpha\}$ se e solo se $\overline{\mathrm{Conv} Y} \subset \{L \geq \alpha\}$, perché $\{L \geq \alpha\} \in \mathcal{K}$, e quindi $H_Y = H_{\overline{\mathrm{Conv} Y}}$; ma essendo $\overline{\mathrm{Conv} Y}$ chiuso convesso, dal punto precedente otteniamo $H_{\overline{\mathrm{Conv} Y}} = \overline{\mathrm{Conv} Y}$, e dunque dev'essere $H_Y = \overline{\mathrm{Conv} Y}$.*

Esercizio 4.
Sia $X = \ell_1$ e $L \in X^*$ definito da

$$Lx(k) := \left(1 - \frac{1}{k}\right) x(k).$$

1. *Calcolare $\|L\|_{X^*}$ e dimostrare che per ogni $x \in X$ tale che $\|x\|_X = 1$ vale la disuguaglianza stretta $Lx < \|L\|_{X^*}$.*

Soluzione: *Poiché L è del tipo $Lx(k) = x(k)y(k)$, con $y(k) = 1 - \dfrac{1}{k}$, dal noto teorema che caratterizza il duale di X, avremo*

$$\|L\|_{X^*} = \|y\|_{\ell_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Prendiamo ora $x \in X$ *con* $\|x\| = 1$*; poiché* $x \not\equiv 0$*, esisterà* $N \in \mathbb{N}$ *per cui* $\sum_{k=1}^{N} |x(k)| > 0$*, e dunque*

$$\begin{aligned}
Lx &= \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k) \le \sum_{k=1}^{N} |x(k)||y(k)| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)||y(k)| \\
&\le \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^{N} |x(k)| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)| \\
&< \sum_{k=1}^{N} |x(k)| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)| \\
&= 1 \\
&= \|L\|.
\end{aligned}$$

2. *Utilizzando il punto precedente e un corollario del Teorema di Hahn-Banach, dimostrare che* ℓ_1 *non è uno spazio riflessivo.*

Soluzione: Per un corollario del Teorema di Hahn-Banach sappiamo che per ogni $L \in X^{**}$ *esiste* $\Lambda \in X^{**}$ *tale che* $\|\Lambda\|_{X^{**}} = 1$ *e* $\Lambda L = \|L\| = 1$*; se* X *fosse riflessivo, allora l'isometria* $J : X \to X^{**}$ *sarebbe suriettiva e dunque* $\Lambda = J(x)$ *per qualche* $x \in X$*, che verificherebbe* $\|x\|_X = Lx = 1$*, ma dal punto precedente sappiamo che ciò è impossibile.*

Esercizio 5.
Sia $X = L^1([0,1])$ *e* $F \lhd X^*$ *definito da:*

$$F := \left\{ L : f \mapsto \int_0^1 fg : g \in C([0,1]) \right\}.$$

1. *Determinare esplicitamente l'ortogonale di* F *in* X^**, ovvero:*

$$F^\perp := \left\{ f \in X : \int_0^1 fg = 0, \forall g \in C([0,1]) \right\}.$$

Soluzione: L'ortogonale di F *contiene solo il vettore nullo. Infatti, se* $f \in F^\perp$*, allora per la densità delle funzioni continue esiste una successione* $g_n \in C([0,1])$ *uniformemente limitata tale che* $g_n \underset{n\to+\infty}{\to} \operatorname{segno}(f)$ *q.o.; dunque,* $fg_n \underset{n\to+\infty}{\to} |f|$ *q.o. e* $|fg_n| \le C|f| \in L^1([0,1])$*, pertanto dal teorema di convergenza dominata otteniamo*

$$0 = \int_0^1 fg_n \underset{n\to+\infty}{\to} |f|,$$

quindi $f = 0$.

2. *Dire se vale* $F = F^{\perp\perp}$ *e confrontare con quanto visto a lezione.*

Soluzione: Poiché $F^\perp = \{0\}$*, allora* $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X^*$*, dunque non vale l'uguaglianza* $F = F^{\perp\perp}$*. Questo non contraddice quanto visto a lezione, perché in generale anche per spazi lineari chiusi l'inclusione* $F \subset F^{\perp\perp}$ *può essere stretta; l'uguaglianza è sempre valida negli spazi riflessivi, ma come abbiamo visto* X *non è riflessivo.*