AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi su Uniforme limitatezza, Teoremi della mappa aperta e del grafico chiuso

Esercizio 1.
Sia $X = c_{00}$ *lo spazio delle successioni infinitesime*

$$X := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists\, K \in \mathbb{N} : x(k) = 0 \quad \forall\, k \geq K\},$$

sia $\|\cdot\|$ *una qualsiasi norma su* X *e, per* $n \in \mathbb{N}$, *sia* $L_n \in X^*$ *definito da* $L_n x = n\|e_n\|x(n)$.

1. *Dimostrare che* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |L_n x| < +\infty$ *per ogni* $x \in X$ *ma* $\|L_n\|_{X^*} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
2. *Dedurre che* X *non è uno spazio di Banach per nessuna scelta di* $\|\cdot\|$.

Esercizio 2.
Sia $X = C\left(\mathbb{S}^1\right) := \{f \in C([-\pi,\pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}$ *e, per* $N \in \mathbb{N}$, $L_N \in X^*$ *dato da*

$$L_N : f \mapsto S_N f(0), \qquad\qquad S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

1. *Utilizzando il fatto che* $\|L_N\|_{X^*} \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$, *dimostrare che il sottoinsieme* $Z \subset X$ *dato da*
$$Z_0 := \left\{f \in X : \sup_{N\in\mathbb{N}} |L_N f| = +\infty\right\}$$
è intersezione numerabile di aperti densi ed è esso stesso denso in X.
2. *Sia ora, per* $q \in \mathbb{Q} \in [0,1]$, $L_{N,q} \in X^*$ *definito da* $L_{N,q} f = S_N f(q)$. *Dimostrare che* $\|L_{N,q}\|_{X^*} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *e che*
$$Z_q := \left\{f \in X : \sup_{N\in\mathbb{N}} |L_{N,q} f| = +\infty\right\}$$
è intersezione numerabile di aperti densi e denso in X.
3. *Dedurre che l'insieme* $Z = \bigcap\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} Z_q$ *è un sottoinsieme denso di* X *e il sottoinsieme* $Y \subset [0,1]$ *dato da*
$$Y := \left\{x \in [0,1] : \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f(x)| = +\infty, \forall f \in Z\right\}$$
è denso in $[0,1]$.

Esercizio 3.
Sia X *uno spazio normato e* $E \subset X$ *un sottospazio lineare, e sia* $r : X^* \to E^*$ *data da* $r(L) = L|_{E^*}$.

1. *Calcolare* $\|r\|_{\mathcal{L}(X^*,E^*)}$.
2. *Dimostrare che* r *è iniettiva se e solo se* E *è denso in* X.
3. *Dimostrare che* r *è suriettiva e aperta.*

Esercizio 4.
Una funzione $f \in C([0,1])$ *si dice Hölderiana di esponente* $\alpha \in (0,1]$ *se esiste* $C > 0$ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

1. *Dimostrare che* f *è Hölderiana di qualche esponente* α *se e solo se* $f \in A_N$ *per qualche* n, *dove*
$$A_N := \left\{ f \in C([0,1]) : |f(x) - f(y)| \leq N|x-y|^{\frac{1}{N}}, \forall x, y \in [0,1] \right\}.$$
2. *Sia ora* N *fissato,* $f \in A_N$ *e* $g \in C([0,1])$ *non Hölderiana; dimostrare che la successione* $f_n := f + \dfrac{g}{n}$ *converge a* f *in* $C([0,1])$ *e dedurne che gli* A_N *hanno interno vuoto.*
3. *Dimostrare che gli* A_N *sono chiusi e dedurne che le lo spazio delle funzioni Hölderiane è di prima categoria in* $C([0,1])$.

Esercizio 5.
Sia H *uno spazio di Hilbert separabile,* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un sistema ortonormale completo su* H, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione positiva e infinitesima e* $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *dato da*

$$A : \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n c_n e_n.$$

1. *Dimostrare che* $e_n \in \operatorname{ran}(A)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e dedurre che* $\operatorname{ran}(A)$ *è denso in* H.
2. *Dimostrare che* A *è iniettivo ma non suriettivo.*
3. *Determinare esplicitamente l'operatore inverso sinistro* $B : \operatorname{ran}(A) \to \ell_2$ *tale che* $B \circ A = \mathbb{I}_H$ *e dimostrare che non è continuo; dire perché non è in contraddizione con quanto visto a lezione.*