AM450 - I prova di esonero - 12/04/2019

Esercizio 1 (10 punti).
Sia H uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale completo su H e siano, per $\alpha \in A$,

$$K_\alpha := \{x \in H : (x, e_\alpha) \geq 0\} \qquad\qquad K := \bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha.$$

1. *(5 punti) Dimostrare che K_α è chiuso e convesso per ogni $\alpha \in A$ e anche K è chiuso e convesso.*
2. *(5 punti) Scrivere esplicitamente le proiezioni $P_\alpha : H \to K_\alpha$, per $\alpha \in A$, e $P : H \to K$.*

Esercizio 2 (10 punti).
Sia X uno spazio di Banach e $E = \{L = 0\}$ un iperpiano chiuso, per $L \in X^* \setminus \{0\}$.

1. *(4 punti) Dimostrare che $\mathrm{d}(x, E) := \inf_{y\in E} \|x - y\| = \dfrac{|Lx|}{\|L\|_{X^*}}$.*
   (Suggerimento: se $y \in E$ allora $L(x - y) = Lx$; inoltre, se $Lz \neq 0$ allora $x - \dfrac{Lx}{Lz} z \in E$).
2. *(3 punti) Utilizzando un corollario del Teorema di Hahn-Banach, dimostrare che: se X è riflessivo allora per ogni $x \in X$ esiste un punto $y_0 \in E$ di distanza minima, cioè tale che $\mathrm{d}(x, E) = \|x - y_0\|$.*
3. *(3 punti) Sia ora $X = C([0, 1])$ e $E = \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 0 \right\}$. Dimostrare che se $f \notin E$ non esiste nessuna $g \in E$ di distanza minima.*

Esercizio 3 (10 punti).
Sia X uno spazio normato e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |Lx_n| < +\infty$ per ogni $L \in X^*$

1. *(3 punti) Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n : X^* \to \ell_1$ data da $A_n : L \mapsto (Lx_1, \dots, Lx_n, 0, \dots)$. Calcolare $\|A_n L\|_{\ell_1}$ per ogni $L \in X^*$ e, dando per buona la linearità, dimostrare che A_n è continua.*
2. *(3 punti) Verificare che la famiglia $\{A_n\} \in \mathcal{L}(X^*, \ell_1)$ verifica le ipotesi del Teorema di Banach-Steinhaus e applicare il teorema a questa successione.*
3. *(2 punti) Dedurre che esiste $C > 0$ tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |Lx_n| \leq C\|L\|_{X^*}$ per ogni $L \in X^*$.*
4. *(2 punti) Utilizzando la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$ data da*

   $$x_n = \frac{e_n}{n} = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots\right),$$

   dimostrare che le ipotesi iniziali <u>non</u> implicano necessariamente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$.