AM450 - I prova di esonero - 12/04/2019

Esercizio 1 (10 punti).
Sia H uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale completo su H e siano, per $\alpha \in A$,

$$K_\alpha := \{x \in H : (x, e_\alpha) \geq 0\} \qquad\qquad K := \bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha.$$

1. *(5 punti) Dimostrare che K_α è chiuso e convesso per ogni $\alpha \in A$ e anche K è chiuso e convesso.*

Soluzione: *K_α è chiuso perché preimmagine del chiuso $\{0\}$ rispetto alla mappa continua $x \mapsto (x, e_\alpha)$. Inoltre è convesso perché se $(x, e_\alpha) \geq 0, (y, e_\alpha) \geq 0$ e $\lambda \in [0, 1]$ allora $((1-\lambda)x + \lambda y, e_\alpha) = (1-\lambda)(x, e_\alpha) + \lambda(y, e_\alpha) \geq 0$.*
K è chiuso perché intersezione di chiusi ed è convesso perché intersezione di convessi.

2. *(5 punti) Scrivere esplicitamente le proiezioni $P_\alpha : H \to K_\alpha$, per $\alpha \in A$, e $P : H \to K$.*

Soluzione: *Scrivendo ogni $x \in H$ come serie di Fourier, la proiezione P_α è data da*

$$P_\alpha : x \mapsto (x, e_\alpha)^+ e_\alpha + \sum_{\beta\neq\alpha} (x, e_\beta) = x + (x, e_\alpha)^- e_\alpha.$$

Verifichiamolo utilizzando la caratterizzazione della proiezione per cui $(P_\alpha(x)-x, P_\alpha(x)-y) \leq 0$ per ogni $y \in K_\alpha$: poiché $P_\alpha(x) - x = (x, e_\alpha)^- e_\alpha$, allora

$$(P_\alpha(x) - x, P_\alpha(x) - y) = (x, e_\alpha)^- ((x, e_\alpha)^+ - (y, e_\alpha)).$$

Se $(x, e_\alpha) \geq 0$, allora $(x, e_\alpha)^- = 0$ e dunque il prodotto scalare è nullo; se invece $(x, e_\alpha) < 0$, allora otteniamo $(x, e_\alpha)(y, e_\alpha)$, che sarà minore o uguale a 0 perché, essendo $y \in K_\alpha$, avremo $(y, e_\alpha) \geq 0$. Per la proiezione su K invece definiamo

$$P : x \mapsto \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)^+.$$

Verifichiamo, come per le P_α, la validità della condizione:

$$(P(x) - x, P(x) - y) = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)^- ((x, e_\alpha)^+ - (y, e_\alpha)) :$$

con lo stesso argomento di prima dimostriamo che ciascun addendo è nullo se $(x, e_\alpha) \geq 0$ e altrimenti è non positivo, dunque otteniamo nuovamente $(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0$.

Esercizio 2 (10 punti).
Sia X uno spazio di Banach e $E = \{L = 0\}$ un iperpiano chiuso, per $L \in X^* \setminus \{0\}$.

1. *(4 punti) Dimostrare che $\mathrm{d}(x, E) := \inf_{y\in E} \|x - y\| = \dfrac{|Lx|}{\|L\|_{X^*}}$.*

   (Suggerimento: se $y \in E$ allora $L(x - y) = Lx$; inoltre, se $Lz \neq 0$ allora $x - \dfrac{Lx}{Lz} z \in E$).

Soluzione: *Se $y \in E$, allora*

$$\frac{|Lx|}{\|L\|} = \frac{|L(x-y)|}{\|L\|} \leq \|x-y\|;$$

pertanto, prendendo l'estremo inferiore al variare di y, otteniamo $\mathrm{d}(x,E) \geq \dfrac{|Lx|}{\|L\|}$.
Per ottenere l'altra disuguaglianza, per ogni $\varepsilon > 0$ prendiamo $z \in X$ con $\|z\| = 1$ e $|Lz| \geq (1-\varepsilon)\|L\|$ e otteniamo:

$$\mathrm{d}(x,E) \leq \left\| x - \left(x - \frac{Lx}{Lz} z \right) \right\| = \frac{|Lx|}{|Lz|}\|z\| \leq \frac{|Lx|}{(1-\varepsilon)\|L\|};$$

dunque, per l'arbitrarietà di ε, dovrà essere $\mathrm{d}(x,E) = \dfrac{|Lx|}{\|L\|}$.

2. *(3 punti) Utilizzando un corollario del Teorema di Hahn-Banach, dimostrare che: se X è riflessivo allora per ogni $x \in X$ esiste $y_0 \in E$ di distanza minima, cioè tale che $\mathrm{d}(x,E) = \|x - y_0\|$.*

Soluzione: *Per un corollario del teorema di Hahn-Banach esiste $\Lambda \in X^{**}$ tale che $\|\Lambda\|_{X^{**}} = 1$ e $|\Lambda L| = \|L\|_{X^*}$, dunque se X è riflessivo esiste $z \in X$ con $\|z\| = 1$ e $|Lz| = \|L\|$. Pertanto, scegliendo $y = x - \dfrac{Lx}{Lz} z$ si ottiene*

$$\|x-y\| = \frac{|Lx|}{|Lz|}\|z\| = \frac{|Lx|}{\|L\|} = d(x,E).$$

3. *(3 punti) Sia ora $X = C([0,1])$ e $E = \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 0 \right\}$. Dimostrare che se $f \notin E$ non esiste nessuna $g \in E$ di distanza minima.*

Soluzione: *Il funzionale $L : f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f$ è tale che $|Lf| < \|f\|_X \|L\|_{X^*}$ per ogni $f \in X \setminus \{0\}$. Dunque, per ogni $f \in X \setminus E$, $g \in E$ abbiamo $f - g \neq 0$, quindi*

$$\|f-g\| > \frac{|L(f-g)|}{\|L\|} = \frac{|Lf|}{\|L\|} = \mathrm{d}(f,E).$$

Esercizio 3 (10 punti)**.**

Sia X uno spazio normato e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} |Lx_n| < +\infty$ per ogni $L \in X^*$

1. *(3 punti) Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n : X^* \to \ell_1$ data da $A_n : L \mapsto (Lx_1, \ldots, Lx_n, 0, \ldots)$. Calcolare $\|A_n L\|_{\ell_1}$ per ogni $L \in X^*$ e, dando per buona la linearità, dimostrare che A_n è continua.*

Soluzione: *Per definizione di norma, abbiamo*

$$\|A_n L\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |A_n L(k)| = \sum_{k=1}^{n} |Lx_k|;$$

inoltre, $\|A_n L\|_{\ell_1} \leq \|L\|_{X^*} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X$ e dunque $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X^*,\ell_1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X < +\infty$.

2. *(3 punti) Verificare che la famiglia $\{A_n\} \in \mathcal{L}(X^*,\ell_1)$ verifica le ipotesi del Teorema di Banach-Steinhaus e applicare il teorema a questa successione.*

Soluzione: *Per ipotesi abbiamo $\sup_n \|A_n L\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |Lx_k| < +\infty$ per ogni $L \in X^*$, dunque dal teorema di Banach-Steinhaus abbiamo $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(X^*,\ell_1)} < +\infty$.*

3. *(2 punti) Dedurre che esiste $C > 0$ tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} |Lx_n| \leq C\|L\|_{X^*}$ per ogni $L \in X^*$ e che inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$.*

Soluzione: *Dal punto precedente, sappiamo che esiste $C > 0$ tale che $\|A_n L\| \leq C\|L\|$ per ogni n, dunque dal calcolo esplicito di $\|A_n L\|$ otteniamo $\sum_{k=1}^{n} |Lx_k| \leq C\|L\|$ e la conclusione segue semplicemente dal passare al limite per $n \to +\infty$.*

4. *(2 punti) Utilizzando la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$ data da*

$$x_n = \frac{e_n}{n} = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots\right),$$

dimostrare che le ipotesi iniziali <u>non</u> implicano necessariamente $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Soluzione: *Poiché ogni funzionale $L \in \ell_2^*$ è del tipo $L : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$ per qualche $y \in \ell_2$, allora avremo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |Lx_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|y(n)|}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} y(n)^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} < +\infty,$$

dunque le ipotesi iniziali sono soddisfatte nonostante $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.